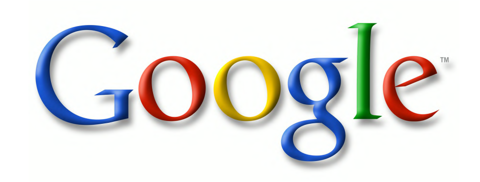
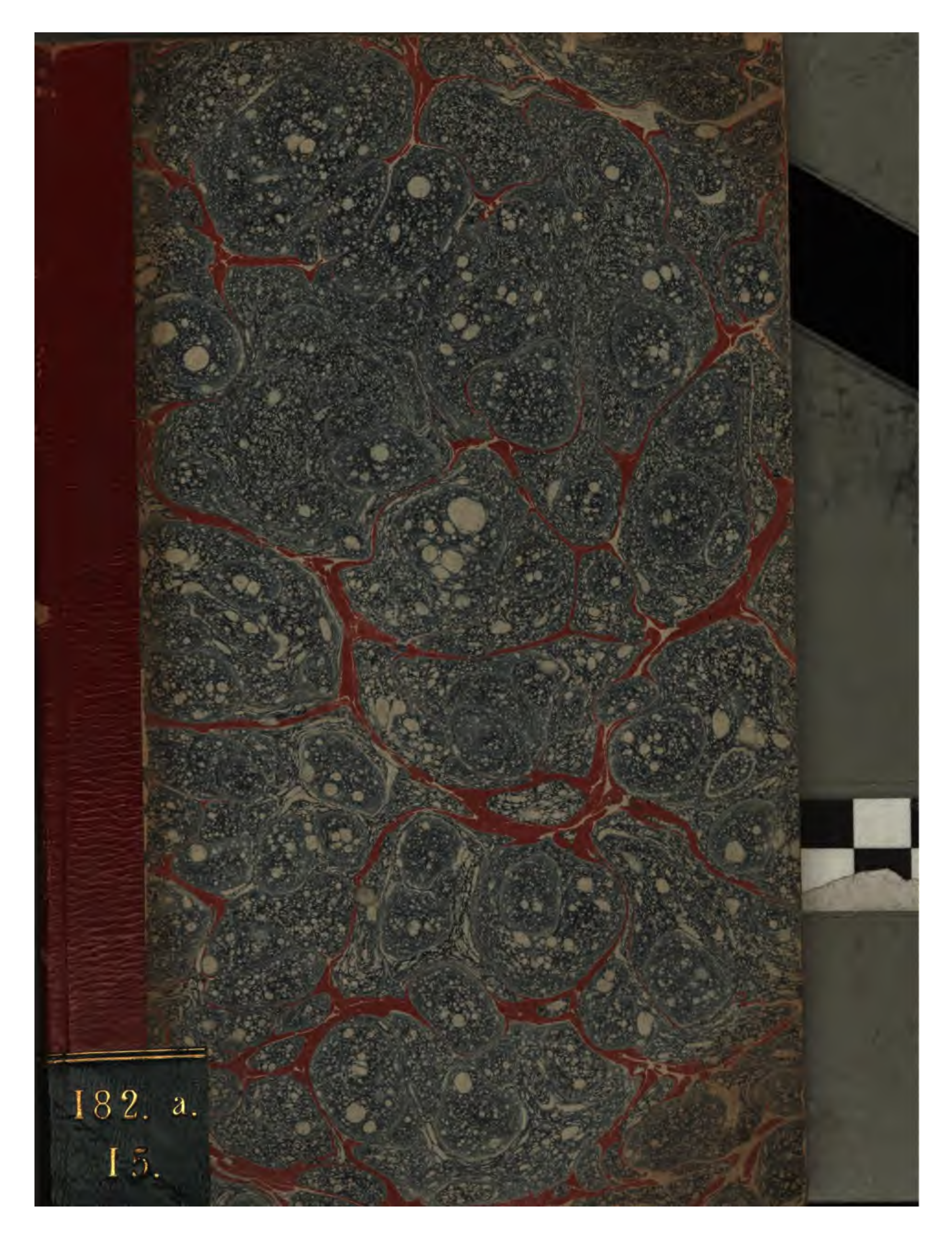




182. a.
15.

# MANUEL THÉORIQUE ET PRATIQUE

DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE

# DES MOINDRES CARRÉS

AU

CALCUL DES OBSERVATIONS

GENÈVE, IMPRIMERIE RAMBOZ ET SCHUCHARDT.

# MANUEL

## THÉORIQUE ET PRATIQUE

## DE L'APPLICATION DE LA

# MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

## AU

# CALCUL DES OBSERVATIONS

PAR

ÉLIE RITTER
DOCTEUR ÈS SCIENCES

PARIS
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

1858


BIBLIOTHECA · BODLEIANA ·

# INTRODUCTION

Le but que se proposent les expérimentateurs dans les recherches de précision qui se rapportent aux différentes branches de la philosophie naturelle, se réduit toujours à la détermination d'un ou de plusieurs éléments numériques que l'observation seule peut faire connaître, et qui sont en quelque sorte les constantes des intégrales auxquelles conduit l'analyse appliquée à l'étude des phénomènes naturels.

Or, quelle que soit l'habileté de l'observateur, et quelques soins qu'il ait mis dans le choix de ses instruments et dans la manière de les consulter, il n'arrive jamais à un résultat rigoureusement exact, et ses expériences, même dans le cas où elles seraient d'une extrême simplicité, ne sont jamais entièrement exemptes d'erreurs. Ces erreurs, qui sont la conséquence de nos instruments imparfaits et de nos perceptions limitées, semblent nous interdire l'accès à la vérité absolue; nous ne pouvons que nous en approcher de plus en plus à mesure que nous parvenons à combattre les causes qui nous en éloignent, ou que nous cherchons à les neutraliser par la fréquente répétition des mêmes expériences.

Ce dernier moyen, habituellement et nécessairement employé dans les recherches exactes, présente l'avantage inappréciable d'un contrôle qui permet de juger de la précision du résultat, et qui éclaire l'observateur sur le champ de l'incertitude dont est affectée la détermination à laquelle il est parvenu.

Mais le nombre des observations étant supérieur à celui des éléments dont il s'agit d'obtenir la valeur, il se trouve en présence

d'un problème plus que déterminé; il a à résoudre un système d'équations qui ne sont qu'approximativement exactes, mais dont le nombre est plus grand que celui des inconnues qu'il cherche.

Pour résoudre ce système de la manière la plus plausible, on le soumet à une méthode qui a été publiée pour la première fois en 1806 par LEGENDRE sous le nom de MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS, dans son ouvrage intitulé: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* La métaphysique de cette méthode et son algorithme ont été perfectionnés et complétés par les recherches de GAUSS, qui l'avait découverte et appliquée avant la publication du mémoire de LEGENDRE. Les travaux de IVORY en Angleterre, ceux de BESSEL et de ENCKE en Allemagne, ont considérablement contribué à en répandre l'usage et à en faciliter l'application. En France, aucun ouvrage élémentaire n'a traité ce sujet de manière à pouvoir servir de guide et de manuel au calculateur. C'est cette lacune que nous voulons essayer de combler. Nous chercherons à présenter de la manière la plus élémentaire, les points principaux de la métaphysique de cette méthode, et à développer aussi complétement que possible la pratique de son application.

Un point sur lequel il nous a paru utile d'insister, n'a pas toujours été apprécié avec l'attention qu'il mérite, c'est la nécessité d'effectuer tous les calculs avec rigueur en conservant dans les opérations une ou deux décimales de plus que n'en doivent avoir les résultats, afin que les erreurs de calcul ne puissent dans aucun cas altérer et fausser les déterminations auxquelles on doit parvenir. Les nombres sur lesquels on opère sont sans doute inexacts, mais la méthode tient compte des erreurs qui les affectent, et sa réussite exige qu'on ne les dénature pas par l'introduction d'un nouvel élément d'incertitude.

---

## CHAPITRE PREMIER

**De la nature des erreurs dans les expériences de précision et de leur distribution autour du résultat vrai.**

1. Les erreurs des observations appartiennent à deux catégories très-distinctes l'une de l'autre et qu'il est important de caractériser. Les premières, que l'on nomme *erreurs constantes ou régulières*, proviennent d'une ou de plusieurs causes qui agissent constamment de la même manière, et ont pour effet d'altérer toujours dans le même sens le résultat de l'expérience. Ces erreurs doivent être évitées avec soin, parce qu'elles ôtent toute valeur aux observations qu'elles affectent. L'observateur doit donc étudier avec attention les causes qui les produisent, afin de les faire disparaître si cela est possible; s'il ne peut y parvenir, il doit chercher au moins à en apprécier l'effet, afin d'en dégager, dans chaque cas, le résultat de l'observation.

Les erreurs de la seconde catégorie, que l'on nomme *erreurs fortuites*, sont celles qui naissent capricieusement dans chaque observation et qui sont dues à des causes physiologiques ou physiques qui agissent tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, sans paraître obéir à des lois régulières. Ces erreurs sont les seules dont on doive supposer affectées les observations dont on veut soumettre les résultats au calcul.

2. Qu'il s'agisse par exemple de mesurer une ligne droite pour déterminer sa longueur en mètres. Si l'on se sert pour effectuer cette mesure d'une règle de métal, et si l'on commet une erreur sur la température à laquelle sa longueur représente celle du mètre, *toutes* les observations seront affectées d'une *erreur régulière* provenant de cette cause, et quelque grand nombre de fois que l'on répète l'opération, il sera impossible d'en conclure un

résultat exact. Si, au contraire, on connaît exactement la température à laquelle la règle équivaut au mètre et si l'erreur affecte dans les différentes observations la température actuelle de la règle, chaque observation sera entachée d'une *erreur fortuite*, mais ces erreurs auront lieu tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et en répétant un grand nombre de fois l'opération on pourra espérer d'en anéantir l'effet en les compensant.

3. Quoique les erreurs fortuites semblent par leur nature ne donner aucune prise au calcul, et être le fruit de l'inconstance et de l'irrégularité, elles sont cependant en réalité soumises, dans leur ensemble, à des lois beaucoup plus précises qu'on ne serait tenté de le croire *a priori*. Ces lois, que la réflexion et la pratique ont révélées, peuvent s'énoncer dans leur généralité de la manière suivante :

1° Des erreurs en plus et en moins, mais égales en valeur absolue, sont également possibles et sont aussi fréquentes les unes que les autres dans un très-grand nombre d'observations.

2° Dans chaque espèce d'observations il y a une limite que les plus grandes erreurs absolues ne dépassent pas, en sorte que si $g$ désigne cette limite, les erreurs négatives sont toutes comprises entre 0 et $-g$, et les erreurs positives entre 0 et $+g$; l'intervalle total du champ des erreurs comprenant ainsi une étendue égale à $2g$.

3° Les erreurs ne se distribuent pas d'une manière uniforme dans toute l'étendue de l'intervalle $2g$ qui les comprend toutes; les erreurs les plus fréquentes sont les plus petites et leur nombre tend à diminuer à mesure que la grandeur absolue de l'erreur augmente. Il en résulte que, si l'on représente par $\Delta$ la grandeur absolue d'une erreur et par $\varphi(\Delta)$ la fréquence relative ou la facilité relative de cette erreur dans un très-grand nombre d'observations, cette fonction aura son maximum pour $\Delta=0$ et tendra à diminuer à mesure que la valeur absolue de $\Delta$ augmentera, de manière à devenir nulle pour $\Delta \overline{\gtrless} \pm g$; mais ses décroissements seront d'autant plus lents que la valeur absolue de $\Delta$ sera plus petite et d'autant plus rapides que $\Delta$ s'approchera d'une des limites $\pm g$.

Cette fonction $\varphi(\Delta)$ que GAUSS appelle : *Coefficient de la proba-*

*bilité de l'erreur* $\Delta$, est d'une extrême importance dans la discussion des observations, et nous devons d'entrée nous occuper de fixer d'une manière précise sa signification réelle et de rechercher sa forme.

4. Nous rappellerons d'abord les principes suivants, que la méthode des moindres carrés emprunte au calcul des probabilités :

I. La probabilité qu'une cause amènera par son action un certain événement $E$, est représentée par une fraction qui a pour numérateur le nombre des cas dans lesquels cette cause fait naître l'effet E, ou, comme l'on dit, le nombre des cas favorables, et pour dénominateur le nombre des cas possibles.

II. Lorsqu'une cause peut faire naître, par son action, différents événements $E', E'' \ldots E^{(n)}$ et seulement ceux-là, si l'on représente par $f', f'' \ldots f^{(n)}$ le nombre respectif des cas favorables à chacun d'eux, la probabilité que par une seule action de la cause l'événement E' sera produit, est exprimée par $\frac{f'}{F}$ en faisant $F = f' + f'' \ldots + f^{(n)}$; de même la probabilité que par une seule action de la cause l'un des événements E' ou E'' sera produit, est exprimée par $\frac{f'}{F} + \frac{f''}{F}$; etc. Et la probabilité que l'un des *n* événements E', E'' … $E^{(n)}$ sera produit par une seule action de la cause sera :

$$\frac{f'}{F} + \frac{f''}{F} + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}}{F} = 1$$

c'est-à-dire la certitude, comme cela est évident.

III. Si une première cause peut amener l'événement E et cela avec une probabilité exprimée par $\frac{f}{F}$ et si une seconde cause peut amener l'événement E' avec une probabilité $\frac{f'}{F'}$, la probabilité du concours des deux événements par une action simultanée des deux causes est égale à $\frac{f}{F} \times \frac{f'}{F'}$.

IV. Soient C, C', C'' … plusieurs causes exclusives les unes des autres, mais également probables, qui peuvent faire naître par leur

action un certain événement E ; désignons par $\frac{f}{F}$ la probabilité de cet événement par l'action de la cause C, par $\frac{f'}{F'}$ cette probabilité par l'action de la cause C', etc. ; lorsque l'événement E aura été produit, la probabilité qu'il est dû à la cause C sera à la probabilité qu'il est dû à la cause C' dans le rapport de $\frac{f}{F}$ à $\frac{f'}{F'}$.

(Voir la note A pour la démonstration de ces principes.)

5. Supposons maintenant que nous ayons répété un très-grand nombre de fois une même observation destinée à déterminer directement la valeur d'un élément numérique quelconque. Remarquons d'abord que le nombre des erreurs différentes que nous avons pu commettre, quoique très-considérable, n'est pas infini. En effet, les limites de nos perceptions dans tous les genres d'observations, même lorsque nous employons des instruments qui amplifient la puissance de nos sens, mettent nécessairement un intervalle dans la succession des résultats numériques de nos expériences ; cet intervalle peut s'amoindrir à l'aide de moyens plus parfaits, d'instruments plus puissants, mais il existe toujours; nous pouvons mesurer une longueur à un dixième, un centième, un millième, etc. de millimètre près, nous pouvons dans la mesure d'un angle tenir compte d'un dixième, d'un centième, etc. de seconde, mais il y a toujours un terme au delà duquel nous ne pouvons aller, une limite qui interrompt la continuité entre les deux résultats les plus voisins auxquels nous pouvons parvenir.

Nous nommerons $i$ ce petit intervalle qui sépare les résultats successifs de nos observations. Nous désignerons par $n$ le nombre qui exprime combien cet intervalle $i$ est contenu de fois dans l'erreur extrême $g$, en sorte que $g=ni$. Le nombre total des erreurs différentes que pourront présenter nos observations sera donc égal à $2n$ savoir $n$ erreurs positives et $n$ erreurs négatives, et le nombre total des résultats différents, en comprenant le cas d'une erreur *nulle*, sera $2n+1$.

Appelons $m$ le nombre total de nos observations ; nous supposons ce nombre assez grand pour que toutes les erreurs possibles aient été produites et chacune d'elles un nombre de fois proportionnel à sa facilité à se produire.

Désignons par $f(\mu i)$ le nombre qui exprime combien de fois sur nos $m$ observations s'est produite l'erreur $\mu i$ ; d'après ce que nous avons dit $\mu$ est un nombre entier et par une erreur égale à $\mu i$ nous entendons une erreur comprise entre $(\mu-\frac{1}{2})i$ et $(\mu+\frac{1}{2})i$.

Par le premier principe (4. I) la probabilité que l'une quelconque de nos observations prise arbitrairement soit affectée d'une erreur $\mu i$ étant représentée par P nous aurons :

$$P=\frac{f(\mu i)}{m} \qquad (1).$$

Si nous désignons par $M$ la valeur moyenne de $f(\mu i)$, comme le nombre de ces fonctions en y comprenant $f(o)$ est égal à $2n+1$ nous aurons :

$$m=(2n+1)\,M.$$

D'un autre côté l'espace total du champ dans lequel sont comprises les erreurs depuis $-(g+\frac{1}{2}i)$ jusqu'à $+(g+\frac{1}{2}i)$ est égal à

$$2g+i=(2n+1)\,i$$

ou simplement en négligeant $i$ comme insensible à l'égard de $2g$

$$2g=(2n+1)\,i$$

Si nous remplaçons dans l'expression de $m$ le nombre $(2n+1)$ par sa valeur tirée de cette dernière équation, il vient :

$$m=\frac{2g.\,M}{i}$$

et en reportant cette valeur dans l'équation (1) on a :

$$P=\frac{f(\mu i)}{2g\,M}.\,i$$

Mais le facteur $\frac{f(\mu i)}{2g\,M}$ est une fonction de l'erreur $\mu i$ et de constantes ; faisons $\mu i=\Delta$ et représentons cette fonction par $\varphi(\Delta)$ nous aurons :

$$P=\varphi(\Delta).\,i \qquad (2)$$

Telle est l'expression de la probabilité qu'une observation prise au hasard soit affectée de l'erreur $\Delta$. Observons à l'égard de la fonction $\varphi(\Delta)$ que comme $\varphi(\Delta).i$ doit représenter un nombre abstrait, il aurait semblé plus rationnel d'introduire dans le calcul la fonction inverse de $\varphi(\Delta)$ et de présenter P sous la forme :

$$P=\frac{i}{\psi(\Delta)} \text{ en faisant } \psi(\Delta)=\frac{1}{\varphi(\Delta)}$$

parce qu'alors $\psi(\Delta)$ aurait désigné une quantité concrète de même espèce que $i$, c'est-à-dire de même espèce que celle dont l'observation a pour but de déterminer la valeur. Mais au fond cela a peu d'importance, il suffit d'en faire la remarque et de se rappeler que c'est $\frac{1}{\varphi(\Delta)}$ qui présentera ce caractère.

6. D'après la remarque qui termine le second principe (4. II), si l'on fait la somme des probabilités de toutes les erreurs possibles, savoir :

$\varphi(-g)\, i + \varphi(-g+i)\, i + \ldots + \varphi(i)\, i + \varphi(o)\, i + \varphi(i).\, i + \ldots + \varphi(g)\, i$

cette somme exprimera la probabilité qu'une erreur déterminée quelconque soit comprise entre $-g$ et $+g$ ; or cette probabilité équivaut à la certitude, puisque toutes les erreurs possibles sont comprises dans cet intervalle. On a donc

$$\sum_{-g}^{+g} \varphi(\Delta)\, i = 1 \qquad (3)$$

7. La fonction $\varphi(\Delta)$ appartient à la classe des fonctions discontinues et si l'on construisait le lieu géométrique formé par la succession des points dont les abcisses seraient les différentes valeurs de $\Delta$ croissantes par intervalles égaux à $i$ et dont les ordonnées seraient les valeurs correspondantes de $\varphi(\Delta)$, ce lieu géométrique formerait une suite de points isolés, tous placés au-dessus de l'axe des abcisses et d'une manière symétrique à l'égard de l'axe des ordonnées; les points extrêmes seraient placés sur l'axe même des abcisses à une distance de l'origine égale à $\pm g$.

Or si l'on remarque que plus les observations deviennent parfaites plus aussi l'intervalle $i$ devient petit et plus les points successifs tendent à se rapprocher et à former une courbe continue, on est en droit de conclure que l'on peut considérer la continuité de la fonction $\varphi(\Delta)$ au moins comme une approximation, et comme une approximation d'autant plus étroite, que les observations seront plus parfaites et en plus grand nombre. Sous cette hypothèse l'intervalle $i$ devient la différentielle $d\Delta$ et le signe $\Sigma$ de l'équation (3) devient le signe intégral $\int$ ; on a donc

$$\int_{-g}^{+g} \varphi(\Delta).\, d\Delta = 1.$$

8. En outre, si nous considérons en elles-mêmes les limites $+g$ et $-g$ des erreurs extrêmes, nous reconnaîtrons que ces limites ne sont jamais tranchées d'une manière précise et qu'elles conservent dans chaque nature d'observations un caractère de vague et dans une certaine mesure de l'indétermination. D'un autre côté, en attribuant à la fonction $\varphi(\Delta)$ le caractère de la continuité, nous nous sommes privés de la possibilité de la rendre nulle à la fois pour $\Delta=\pm g$ et pour toutes les valeurs supérieures à celles-là. Ce double inconvénient sera levé si, en continuant à considérer $\varphi(\Delta)$ comme une quantité continue, nous attribuons à cette fonction une forme telle qu'elle ait pour $\Delta=\pm g$ une valeur très-petite et au delà un décroïssement extrêmement rapide, bien que ce décroissement ne la rende nulle que pour une valeur infinie de $\Delta$. On pourra alors remplacer l'équation précédente par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) \,.\, d\Delta=1 \qquad (4)$$

En résolvant ainsi la difficulté, il ne pourra y avoir aucun inconvénient, puisque par la nature de $\varphi(\Delta)$ l'intégrale

$$\int_{g}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

sera tout à fait insensible et négligeable et il y a ce nouvel avantage que les limites extrêmes $+g$ et $-g$ avec leur caractère d'indétermination disparaissent entièrement de l'intégrale et par conséquent de l'expression de $\varphi(\Delta)$ dont l'équation (4) a pour but de fixer l'une des constantes.

9. Nous devons maintenant chercher à déterminer la forme de la fonction $\varphi(\Delta)$. Dans ce but nous la considérerons d'abord dans sa nature réelle, c'est-à-dire comme une fonction discontinue exprimant la fréquence relative d'une erreur $\Delta$.

Supposons que dans une série de $m$ observations destinées à faire connaître la valeur de $n$ inconnues $x, y, z \ldots$, $n$ étant plus petit que $m$, les erreurs inconnues qui affectent chacun des $m$ résultats soient représentées individuellement par $\Delta', \Delta'', \ldots \Delta^{(m)}$, et désignons comme plus haut par $i$ l'intervalle que la limite de nos perceptions impose à la succession des résultats numériques auxquels nos observations nous conduisent.

La probabilité que l'erreur $\Delta'$ affecte l'observation dans laquelle elle s'est manifestée est représentée, comme nous l'avons vu (2), par

$$\varphi(\Delta') \,.\, i$$

De même la probabilité que l'erreur $\Delta''$ affecte l'observation où elle a eu lieu est :

$$\varphi(\Delta'') \,.\, i$$

Et en raisonnant de même sur chaque observation, nous obtiendrons une forme analogue pour la probabilité de chaque erreur spéciale. Par conséquent la probabilité que l'ensemble de nos observations ait amené le système des erreurs réellement obtenues sera la probabilité composée relative à la simultanéité de toutes ces erreurs ; elle sera par conséquent (4. III) égale au produit de toutes ces probabilités simples. En la désignant par W nous aurons :

$$W = i^m \,.\, \varphi(\Delta') \,.\, \varphi(\Delta'') \ldots \varphi(\Delta^{(m)}) \,. = i^m P \qquad (5)$$

en désignant par P le facteur de $i^m$.

D'après le 4me principe (4. IV) le système le plus plausible sera celui qui donnera à W la plus grande valeur possible. Or $i$ est constant, il faudra donc pour atteindre le but déterminer la valeur des inconnues $x$, $y$, $z$ . . . et par suite celle des erreurs $\Delta'$, $\Delta''$ . . $\Delta^{(m)}$ de manière à rendre P maximum. Or l'on a :

$$log\, P = lg\, \varphi(\Delta') + lg\, \varphi(\Delta'') + \ldots + lg\, \varphi(\Delta^{(m)}).$$

Et comme les variables indépendantes sont $x$, $y$, $z$ . . . l'équation du maximum, savoir :

$$dP = o \quad \text{ou ce qui revient au même} \quad \frac{1}{P} \cdot dP = o$$

se décomposera dans les équations suivantes :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dx} = o\,; \qquad \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = o\,; \qquad \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} = o\,; \text{ etc.}$$

Si nous développons ces équations en restituant à $\varphi(\Delta)$ son caractère de fonction continue comme constituant une approximation suffisante et en posant en général :

$$\frac{d\,\varphi(\omega)}{\varphi(\omega)\, d\omega} = \varphi'(\omega) \qquad (6)$$

elles deviendront :

$$\varphi'(\Delta')\frac{d\Delta'}{dx}+\varphi'(\Delta'')\frac{d\Delta''}{dx}+\varphi'(\Delta''')\frac{d\Delta'''}{dx}+\ldots=o$$

$$\varphi'(\Delta')\frac{d\Delta'}{dy}+\varphi'(\Delta'')\frac{d\Delta''}{dy}+\varphi'(\Delta''')\frac{d\Delta'''}{dy}+\ldots=o \text{ etc.} \quad (7)$$

Ces équations qui sont en nombre égal à celui des inconnues et qui doivent servir à déterminer leur valeur la plus plausible ne peuvent être utilisées dans ce but qu'à la condition que la valeur de $\varphi'(\Delta)$ sera connue.

10. Pour cela supposons que nos observations aient pour but de déterminer une seule inconnue $x$; nous n'aurons alors à considérer que la première des équations (7). Supposons en outre que ces observations consistent dans la mesure directe et immédiate de cette quantité, et nous aient donné pour valeurs de cet élément les nombres : $M', M'', \ldots M^{(m)}$. Les équations que nous aurons à considérer seront immédiatement :

$$o=x-M'\,;\ o=x-M''\,;\ o=x-M'''\,;\ldots\ o=x-M^{(m)}$$

et après les avoir corrigées des erreurs des observations :

$$\Delta'=x-M'\,;\ \Delta''=x-M''\,;\ldots\ \Delta^{(m)}=x-M^{(m)}$$

On tire de là $\frac{d\Delta'}{dx}=1$ ; $\frac{d\Delta''}{dx}=1$ ; .... $\frac{d\Delta^{(m)}}{dx}=1$. Par conséquent la première des équations (7) devient :

$$\varphi'(\Delta')+\varphi'(\Delta'')+\ldots+\varphi'(\Delta^{(m)})=o \quad (7)$$

D'un autre côté le premier principe du § 3 sur la fréquence égale des erreurs positives et des erreurs négatives nous impose l'obligation de rendre nulle la somme algébrique de toutes les erreurs. Par conséquent :

$$\Delta'+\Delta''+\ldots+\Delta^{(m)}=o \quad (8)$$

Comme nous n'avons qu'une seule inconnue à déterminer, les deux équations (7) et (8), vraies l'une et l'autre et destinées toutes deux à déterminer la même inconnue au moyen des mêmes données, doivent être, à un facteur près, identiques. Si par conséquent nous désignons par C le facteur constant par lequel on doit multiplier la seconde pour l'identifier à la première, nous aurons en général :

$$\varphi'(\Delta)=C\Delta$$

ou d'après l'éq. (6)

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = C\Delta \,.\, d\Delta$$

Cette dernière équation donne en intégrant :

$$\varphi(\Delta) = C' e^{\frac{1}{2}C\Delta^2}$$

en désignant par C′ la constante.

Puisque la fréquence des erreurs doit diminuer avec leur valeur absolue, la constante $\frac{1}{2}$ C doit être négative ; représentons-la par $-h^2$ nous aurons :

$$\varphi(\Delta) = C' e^{-h^2\Delta^2}$$

Pour déterminer C′ nous substituons cette valeur dans l'équation (4) et nous en tirons (voir la note B) :

$$C' = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

donc enfin :

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \qquad (9)$$

Cette expression explicite et complète de la fréquence relative des erreurs d'après leur valeur absolue a été donnée pour la première fois par Gauss en 1809 dans son ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum cœlestium*. Quoique nous y soyons parvenus par l'examen d'un cas spécial, nous ne pouvons pas mettre en doute sa généralité. Quelque idée en effet que nous puissions nous faire sur la nature des causes physiques ou physiologiques qui altèrent le résultat de nos expériences, l'ensemble de ces causes doit produire des effets analogues dans toutes les espèces d'observations. Les faits d'ailleurs sont venus prouver, de la manière la plus remarquable, la justesse et la généralité de cette forme de la fonction $\varphi(\Delta)$ ; nous aurons plus tard plusieurs occasions de signaler ce curieux contrôle.

11. Il est facile de voir que la valeur de $x$ qui résulte de l'équation (8), que nous avons prise pour base de notre détermination, est la moyenne arithmétique de toutes les valeurs observées.

En effet, en remplaçant dans cette équation $\Delta'$, $\Delta''$ . . . $\Delta^{(m)}$ par leurs valeurs $x$—M', $x$—M'', on obtient :

$$o = mx - M' - M'' - M''' - \dots - M^{(m)} \text{ d'où}$$
$$x = \frac{M' + M'' + \dots + M^{(m)}}{m} .$$

Or tous les observateurs admettent comme un principe incontestable que la moyenne arithmétique, entre plusieurs mesures également précises d'un même élément numérique, représente la valeur la plus plausible de cet élément ; aussi aurions-nous pu appuyer sur ce principe la démonstration développée dans le n° précédent, en en déduisant l'équation (8) comme conséquence. La marche que nous avons suivie, et qui est au fond la même, nous a paru cependant plus rationnelle et plus simple dans sa forme.

---

## CHAPITRE II.

### De la méthode des moindres carrés.

12. La méthode des moindres carrés a pour but d'indiquer la marche à suivre pour résoudre de la manière la plus plausible un système de $m$ équations pour en déduire la valeur de $n$ inconnues, $m$ étant plus grand que $n$. Les $m$ équations sont déduites d'observations affectées d'erreurs inconnues et ne sont qu'approximativement vraies ; elles doivent donc être préalablement corrigées de manière à ce que chacune d'elles devienne compatible avec l'ensemble de toutes les autres.

Pour que les calculs que nécessite cette méthode ne soient pas trop onéreux, il est important et il est toujours facile de faire en sorte que les équations à résoudre soient du premier degré à l'égard des inconnues que l'on veut déterminer. Cela aura lieu immédiatement si les équations qui lient les éléments à déterminer aux valeurs observées, satisfont elles-mêmes à cette condition. Dans le cas contraire, il faudra transformer ces équations en y présentant chaque inconnue sous une forme nouvelle. On rem-

placera $x$, par exemple, par une valeur approchée $\xi$ de cette inconnue, augmentée d'une correction $x$, assez petite pour que l'on puisse négliger comme insensibles son carré et ses puissances supérieures ; de cette manière une fonction quelconque $f(x)$ de cette inconnue se remplacera dans l'équation par $f(\xi)+x.f'(\xi)$ ; on aura fait ainsi disparaître la fonction non linéaire de l'inconnue $x$, et la nouvelle inconnue $x$, n'entrera dans l'équation qu'au premier degré. Si en achevant le calcul on trouvait pour $x$ une valeur trop considérable pour que son carré puisse être considéré comme insensible, il faudrait recommencer l'opération en prenant pour $\xi$ la valeur corrigée de $x$, à laquelle on aurait été conduit.

13. Nous supposerons donc que les équations à résoudre sont du premier degré à l'égard des inconnues et qu'en introduisant dans les équations de condition les valeurs observées, on soit conduit au système suivant :

$$\begin{array}{l} o=ax+by+cz+\ldots.+k. \\ o=a'x+b'y+c'z+\ldots.+k' \\ o=a''x+b''y+c''z+\ldots.+k'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (10)$$

Ces équations au nombre de $m$ et renfermant seulement $n$ inconnues doivent (pour être rendues exactes et compatibles entre elles) être corrigées des erreurs des observations. Nous désignerons ces erreurs par $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$.... et le système à résoudre deviendra après cette correction :

$$\begin{array}{l} \Delta=ax+by+cz+\ldots.+k. \\ \Delta'=a'x+b'y+c'z+\ldots.+k' \\ \Delta''=a''x+b''y+c''z+\ldots.+k'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (11)$$

Ce système doit être résolu de manière à donner aux inconnues $x$, $y$, $z$.... et par conséquent aux erreurs $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$.... qui en dépendent des valeurs telles qu'elles rendent maximum la probabilité de la simultanéité de toutes ces erreurs.

Or d'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, cette probabilité donnée par l'équation (5) est :

$$W=i^m\varphi(\Delta)\varphi(\Delta')\ldots.\varphi(\Delta^{(m-1)})$$

ou bien en remplaçant $\varphi(\Delta)$ par sa valeur trouvée (9) :

$$W=i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m}.e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots)} \qquad (12)$$

Et les seules variables étant $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ .... cette quantité deviendra maximum lorsqu'on donnera à $x$, $y$, $z$ ... des valeurs qui rendront minimum le facteur variable de l'exposant négatif, c'est-à-dire la somme des carrés des erreurs, ou :

$$E=\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots\ldots \tag{13}$$

Cette condition fournira autant d'équations qu'il y a d'éléments à déterminer. En effet, E est une fonction des variables $x$, $y$, $z$... et la condition du minimum donnera les équations suivantes :

$$\frac{dE}{dx}=o\,,\quad \frac{dE}{dy}=o\,,\quad \frac{dE}{dz}=o \text{ etc.}$$

ou bien :

$$\Delta.\frac{d\Delta}{dx}+\Delta'.\frac{d\Delta'}{dx}+\Delta''\frac{d\Delta''}{dx}+\ldots=o$$

$$\Delta.\frac{d\Delta}{dy}+\Delta'.\frac{d\Delta'}{dy}+\Delta''\frac{d\Delta''}{dy}+\ldots=o$$

$$\Delta\frac{d\Delta}{dz}+\Delta'.\frac{d\Delta'}{dz}+\Delta''\frac{d\Delta''}{dz}+\ldots=o$$

. . . . . . . . . . . . . . .

ou enfin :

$$a(ax+by+cz+..+k)+a'(a'x+b'y+c'z+..+k')+a''(a''x+b'y+..+k'')+..=o$$
$$b(ax+by+cz+..+k)+b'(a'x+b'y+c'z+..+k')+b''(a''x+b''y+..+k'')+..=o \tag{14}$$
$$c(ax+by+cz+..+k)+c'(a'x+b'y+c'z+..+k')+c''(a''x+b''y+..+k'')+..=o$$

14. Si l'on convient de représenter les sommes des carrés et des produits des coefficients numériques par la notation suivante :

$$\begin{array}{ll} [a^2]=a^2+a'^2+a''^2+\ldots & [ab]=ab+a'b'+a''b''\ldots \\ [b^2]=b^2+b'^2+b''^2+\ldots & [ac]=ac+a'c'+a''c''\ldots \\ [c^2]=c^2+c'^2+c''^2+\ldots & [bc]=bc+b'c'+b''c''\ldots \text{ etc.} \end{array} \tag{15}$$

les équations (14) pourront s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} [a^2]x+[ab]y+[ac]z+\ldots+[ak]=o \\ [ab]x+[b^2]y+[bc]z+\ldots+[bk]=o \\ [ac]x+[bc]y+[c^2]z+\ldots+[ck]=o \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{16}$$

Et ces équations, dont le nombre est égal à celui des inconnues, donneront pour chacune d'elles la valeur la plus probable que l'on puisse déduire des observations.

15. Avant d'indiquer la manière la plus commode et la plus sûre de parvenir à ces équations et de les résoudre, en se garantissant des erreurs de calcul que l'on doit craindre dans une suite d'opérations qui peut, dans quelques cas, être longue et onéreuse, nous devons présenter sur la fonction $\varphi(\Delta)$ quelques remarques qui nous permettront de juger du degré de confiance que mériteront les valeurs trouvées pour les inconnues. Nous ferons seulement observer que les valeurs des inconnues, et par conséquent celles des erreurs des observations, ne seront jamais déterminées qu'approximativement. Nous ne pourrons d'ailleurs admettre pour ces valeurs que celles que nous donnera le calcul. Nous serons donc forcément contraints de considérer les erreurs calculées comme étant les vraies erreurs, et les déterminations auxquelles nous aurons été conduits par la méthode précédente, comme représentant pour nous la vérité. Mais nous n'oublierons pas que ce n'est la vérité absolue que dans la mesure dans laquelle il nous est donné de l'atteindre. C'est sous la réserve de cette remarque, réserve dont nous aurons l'occasion de mesurer l'étendue, que devront nécessairement se placer les résultats auxquels nous serons conduits.

---

## CHAPITRE III.

### De la mesure de l'exactitude des observations et de l'erreur probable dont sont affectés les résultats qui s'en déduisent.

16. D'après ce que nous avons vu dans le premier chapitre, la probabilité d'une erreur $\Delta$ est donnée par la formule :

$$\varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

et la probabilité qu'une erreur est comprise entre $a$ et $b$ en supposant $b > a$ est :

$$\int_a^b \frac{he^{-h^2\Delta^2}}{\sqrt{\pi}} d\Delta$$

Cette expression représente aussi le nombre relatif des erreurs

comprises entre $a$ et $b$ dans un grand nombre d'observations, en sorte que sur $m$ observations il y en aura un nombre représenté par :

$$m\int_a^b \frac{he^{-h^2\Delta^2}}{\sqrt{\pi}}\,d\Delta$$

qui seront comprises entre $a$ et $b$.

En particulier la probabilité $P_a$ qu'une erreur quelconque ne surpasse pas en valeur absolue un nombre donné $a$ sera exprimée par :

$$P_a=\int_{-a}^{+a}\frac{he^{-h^2\Delta^2}}{\sqrt{\pi}}d\Delta$$

L'intégrale peut être mise sous une forme différente ; en effet, on sait que si $f(x)=f(-x)$ on a :

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{donc :}$$

$$P_a=\int_0^a\frac{2he^{-h^2\Delta^2}}{\sqrt{\pi}}d\Delta. \tag{17}$$

Cette formule exprime la probabilité qu'une erreur, prise au hasard parmi toutes les erreurs d'une série d'observations, ne surpasse pas $a$ en grandeur absolue ; en sorte qu'il y a à parier $P_a$ contre $1-P_a$ qu'une erreur quelconque est inférieure à $a$ ; en d'autres termes parmi $m$ observations il y en a $mP_a$ dont l'erreur ne surpasse pas $a$ et $m(1-P_a)$ dont l'erreur surpasse $a$.

17. On donne à cette intégrale une forme plus simple et plus commode pour le calcul en posant $h\Delta=t$ ; elle devient alors en observant que la limite de $t$ est $ah$ :

$$P_a=\int_0^{ah}\frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}} \tag{18}$$

Cette intégrale ne renfermant que des quantités abstraites, on a pu dresser une table de ses valeurs en prenant la limite $ah$ pour

argument. Nous donnons cette table à la fin du volume avec une étendue suffisante pour les applications que l'on peut en faire.

Elle donne les différentes valeurs de l'intégrale :

$$\Theta(t)=\int_0^t \frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}} .$$

on a donc $P_a$, en prenant pour argument $t=ah$.

Cette table montre comment se répartissent les erreurs dont est affectée une série d'observations ; on voit par exemple que, puisque pour $t=ah=0{,}5$ on a $P_a=0{,}52050$ il y a à parier 5205 contre 4795, c'est-à-dire plus de *un* contre *un* que l'erreur dont est affectée une observation prise au hasard est moindre que $\frac{0{,}5}{h}=\frac{1}{2h}$ ; en d'autres termes le nombre des erreurs plus petites que $\frac{1}{2h}$ est plus grand que le nombre des erreurs supérieures à $\frac{1}{2h}$ dans le rapport de 5205 à 4795. Cette table pourra donc nous servir à vérifier par les faits les résultats de l'analyse et à contrôler la justesse de la loi des erreurs à laquelle nous avons été conduits ; mais nous devons auparavant chercher à fixer la signification précise de la constante $h$, et à obtenir sa valeur au moyen des résultats de l'observation.

18. Parmi toutes les erreurs possibles que peut présenter une série d'observations, il y en a quelques-unes qui méritent une attention spéciale. L'une des plus importantes est celle que l'on nomme l'*erreur probable ;* c'est l'erreur qui dans l'ensemble de toutes est placée de manière que le nombre de celles qui la surpassent est égal au nombre de celles qui lui sont inférieures, en sorte qu'il y a *un* contre *un* à parier que l'erreur d'une observation isolée, prise au hasard, ne la surpasse pas. Si l'on désigne par $\varepsilon$ la valeur absolue de cette erreur, on trouvera cette valeur en résolvant par rapport à $a$ l'équation (18) dans laquelle on fera le premier membre égal à $\frac{1}{2}$.

On aura alors :

$$\frac{1}{2}=\int_{0}^{\varepsilon h}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt$$

Si l'on désigne par $\rho$ la valeur de la limite $\varepsilon h$ de l'intégrale qui vérifie cette équation, on trouve par la table en interpolant :

$$\rho=0,4769363 \qquad (19)$$

et l'on a en même temps :

$$\varepsilon=\frac{\rho}{h} \qquad (20)$$

On voit par là que la connaissance de $h$ est nécessaire pour déterminer l'erreur probable $\varepsilon$. D'ailleurs cette erreur pobable peut servir de mesure à l'incertitude de la détermination, en sorte que si A est la valeur de $x$ que donne le calcul, on peut exprimer symboliquement ce résultat et l'incertitude dont il est affecté en écrivant :

$$x=\mathrm{A}\pm\varepsilon. \qquad (21)$$

19. La valeur trouvée pour $\varepsilon$ équation (20) montre que $h$ peut être considéré comme une expression de la mesure de la précision des observations. En effet si, dans une série d'expériences, $h$ a une certaine valeur, et si dans une autre série d'expériences analogues, $h$ a une valeur double de la première, l'erreur probable dans la seconde série aura une valeur moitié moindre que dans la première et par conséquent la *précision* de cette seconde série sera double de celle de la première. Et ce que nous disons de l'erreur probable, est vrai à l'égard d'une erreur quelconque. Supposons en effet que deux séries d'observations comportent pour $h$ les valeurs particulières $h'$ et $h''$. La probabilité que l'erreur d'une observation isolée de la première série ne surpasse pas $a'$ est donnée par l'équation :

$$\mathrm{P}_{a'}=\int_{0}^{a'h'}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt$$

De même la probabilité qu'une observation isolée, prise au ha-

sard parmi celles de la seconde série n'est pas affectée d'une erreur supérieure à $a''$ est donnée par l'équation :

$$P_{a''}=\int_0^{a''h''}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}dt$$

Or ces deux probabilités seront égales si l'on a :

$$a'\,h'=a''\,h'' \text{ ou bien } a':a''=h'':h'.$$

Donc les valeurs absolues $a'$ et $a''$ des erreurs également probables dans les deux séries sont inversément proportionnelles aux valeurs de $h'$ et de $h''$ ; en sorte que si $h''$ était double de $h'$, $a''$ serait moitié moindre que $a'$ ; ce qui veut dire qu'une erreur double dans la première série a été aussi facilement commise et se rencontre aussi fréquemment qu'une erreur simple dans la seconde : donc la seconde série a un degré de précision deux fois aussi grand que la première. On voit donc que *la constante h mesure le degré de précision des observations.*

20. L'importance que ce résultat attache à la constante $h$ fait que l'on doit rechercher toutes les manières possibles de déterminer sa valeur. Observons que l'on obtiendrait facilement cette valeur si l'on connaissait le rapport des probabilités de deux erreurs déterminées $\Delta$ et $\Delta'$ par exemple. En effet, comme ce rapport a pour expression :

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}i : \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta'^2}i \text{ ou bien } 1 : e^{-h^2(\Delta'^2-\Delta^2)}$$

si l'on en avait la valeur numérique, on déterminerait très-facilement $h$.

Si l'une des deux erreurs déterminées, dont le rapport de probabilité est connu, était une erreur nulle, comme cela a lieu le plus souvent lorsqu'on a recours à cette voie, ce rapport aurait pour expression :

$$1 : e^{-h^2\Delta'^2}$$

On voit par là que : *si dans une série d'observations, la probabilité d'une erreur nulle est à la probabilité d'une erreur $\Delta$ comme $1 : e^{-p\Delta^2}$ on doit en conclure que la mesure du degré de précision de cette série, c'est-à-dire la quantité h, a pour valeur $\sqrt{p}$.*

21. Pour montrer une application de ce principe nous nous en servirons pour rechercher quelle est l'influence du nombre des observations sur la précision du résultat. Supposons qu'une série de *m* observations immédiates destinées à donner la valeur d'une inconnue $x$ ait présenté les erreurs $\Delta'$, $\Delta''$ .... $\Delta^{(m)}$. Nous avons vu que cette inconnue se déterminera de la manière la plus plausible en rendant maximum la valeur de la probabilité de la simultanéité de toutes les erreurs. Cette probabilité est (12) :

$$W = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-h^2(\Delta'^2+\Delta''^2+\dots -)}$$

Désignons par $x=A$ la valeur trouvée en satisfaisant à cette condition et nommons $(\varepsilon_2)^2$ la valeur moyenne du carré des erreurs, c'est-à-dire posons :

$$(\varepsilon_2)^2 = \frac{\Delta'^2+\Delta''^2+\dots\dots+\Delta^{(m)2}}{m}$$

Nous pourrons écrire l'equation (12) sous la forme :

$$W = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-mh^2(\varepsilon_2)^2}$$

Supposons maintenant que nous donnions à $x$ une valeur différente de A par exemple $A+\Delta$ ; la probabilité de cette nouvelle détermination sera :

$$W' = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-h^2\left\{(\Delta'-\Delta)^2+(\Delta''-\Delta)^2+\dots+(\Delta^{(m)}-\Delta)^2\right\}}$$

Si nous développons le facteur de $h^2$ dans l'exposant de $e$ nous obtenons :

$$\Delta'^2+\Delta''^2+\dots-2\Delta(\Delta'+\Delta''+\dots)+m\Delta^2 = m(\varepsilon_2^2+\Delta^2)$$

en observant que la somme des erreurs est nulle et que la somme de leurs carrés est égale comme nous venons de le voir à $m(\varepsilon_2)^2$ ; donc :

$$W' = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-mh^2(\varepsilon_2^2+\Delta^2)}$$

Or W est la probabilité de $x=A$ ou d'une erreur nulle, tandis que W' est la probabilité de $x=A+\Delta$ ou d'une erreur $\Delta$, et comme l'on déduit des valeurs précédentes :

$$W : W' = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-mh^2\varepsilon_2^2} : i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-mh^2(\varepsilon_2^2+\Delta^2)}$$

ou bien :

$$W : W' = 1 : e^{-mh^2\Delta^2},$$

on en conclut que, d'après les $m$ observations, la probabilité d'une erreur nulle est à la probabilité d'une erreur $\Delta$ comme $1 : e^{-mh^2\Delta^2}$. Or, dans une observation isolée, la probabilité d'une erreur nulle est à la probabilité d'une erreur $\Delta$ comme $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, i : \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} i$ ou comme $1 : e^{-h^2\Delta^2}$. Par conséquent d'après le principe, la précision d'une observation isolée étant $h$, celle du résultat déduit de $m$ observations sera $h\sqrt{m}$.

Donc : *le degré de précision dont jouit le résultat d'une série d'observations croît comme la racine carrée du nombre des observations dont elle se compose.*

22. Il arrive quelquefois que l'on est appelé à faire entrer dans un même calcul plusieurs observations qui ne sont pas également précises. On y parvient en tenant compte de ce que l'on nomme leur *poids relatif.* Dans ce but on convient de considérer la précision de l'une des observations comme assignant à cette observation l'unité de poids, et l'on représente le poids de chacune des autres, par les nombres qui expriment combien il faudrait combiner d'observations aussi exactes que la première, pour que leur moyenne donne des résultats respectivement aussi précis que chacune d'elles. On voit par là, et par le principe du *n*° précédent, que *la précision d'une observation est proportionnelle à la racine carrée de son poids,* ou bien que : *son poids est proportionnel au carré de son degré de précision.*

Si, par exemple, une observation est deux fois aussi précise qu'une autre, son poids sera quatre fois aussi grand.

Lorsqu'une observation dont le poids est égal à $\mu$ a donné une équation de condition de la forme :

$$o = ax + by + cz + \ldots + k$$

et qu'elle doit être combinée avec des observations dont le poids est égal à l'unité, on remplace l'équation précédente par :

$$o = a\sqrt{\mu}\,x + b\sqrt{\mu}\,y + c\sqrt{\mu}\,z + \ldots + k\sqrt{\mu}.$$

et l'on parvient au mêne résultat que si l'on avait suivi la marche plus longue et qui pourrait sembler plus naturelle de faire entrer dans le calcul $\mu$ équations identiques à la première.

23. Nous allons maintenant chercher à déduire la valeur de $h$ du résultat des observations. Pour cela, en généralisant la notation que nous avons introduite au n° 20, nous désignerons par $\varepsilon_n$ la racine $n^{me}$ de la moyenne des $n^{mes}$ puissances des erreurs, en sorte qu'en posant :

$$S_n=\Delta'^n+\Delta''^n+\ldots+\Delta^{(m)n}$$

nous aurons :

$$\varepsilon_n=\sqrt[n]{\frac{S_n}{m}}$$

Pour déterminer la valeur de $\varepsilon_n$ nous observons que $(\varepsilon_n)^n$ est la valeur moyenne des $n^{mes}$ puissances de toutes les erreurs. Or, cette moyenne est égale à la somme des produits des $n^{mes}$ puissances de chacune des erreurs multipliées par leurs probabilités respectives. On aura donc :

$$(\varepsilon_n)^n=\int_{+\infty}^{+\infty}\Delta^n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

Faisons $h\Delta=t$, les limites de $t$ seront aussi $\pm\infty$ et l'équation précédente deviendra :

$$(\varepsilon_n)^n=\frac{1}{h^n\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^n\,dt\,e^{-t^2} \qquad (22)$$

Il est facile de voir que si $n$ est un nombre impair, cette intégrale est nulle ; dans ce cas en effet on obtient très-facilement l'intégrale indéfinie du second membre et sa valeur étant nulle aux deux limites, l'intégrale définie est nulle aussi. Si au contraire $n$ est un nombre pair, cette intégrale par une transformation semblable à celle du n° 15 peut être mise sous la forme :

$$(\varepsilon_n)^n=\frac{2}{h^n\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}t^n\,dt\,e^{-t^2} \qquad (23)$$

Lorsque $n$ est impair, l'intégrale indéfinie est nulle comme nous venons de le voir; on peut facilement reconnaître que ce résultat analytique tient à ce que, dans la moyenne des $n^{mes}$ puissances des erreurs, les puissances des erreurs négatives sont détruites, en raison de leur opposition de signe, par les puissances des erreurs positives. Or il y a quelque avantage à déterminer la moyenne des puissances d'ordre impair, en considérant les erreurs dans leur valeur absolue sans égard à leur signe, ou en les considérant toutes comme positives; on y parvient en employant dans ce but la formule (23) étendue en cas de $n$ impair.

24. Si nous intégrons la formule précédente par les méthodes connues, nous trouvons (note B):

si $n$ est impair $$(\varepsilon_n)^n = \frac{1}{h^n\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

si $n$ est pair $$(\varepsilon_n)^n = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{1\ 3\ 5}{2.2.2} \cdots \frac{n-1}{2}$$

Si l'on prend la racine $n^{me}$ de ces équations on trouve

pour $n$ impair $$\varepsilon_n = \frac{1}{h}\sqrt[n]{\left\{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\pi}}\right\}}$$

pour $n$ pair $$\varepsilon_n = \frac{1}{h}\sqrt[n]{\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n-1}{2}\right\}}$$

En employant alternativement ces deux formules on obtient ainsi:

$$\varepsilon_0 = 1 \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\pi}} \qquad \varepsilon_6 = \frac{1}{h}\sqrt[6]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad \varepsilon_4 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}} \qquad \varepsilon_7 = \frac{1}{h}\sqrt[7]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\sqrt{\pi}}} \qquad (24)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{h\sqrt{2}} \qquad \varepsilon_5 = \frac{1}{h}\sqrt[5]{\frac{1 \cdot 2}{\sqrt{\pi}}} \qquad \varepsilon_8 = \frac{1}{h}\sqrt[8]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}} \quad \text{etc.}$$

Chacune de ces équations est propre à nous donner la valeur

de $h$ au moyen des erreurs qui peuvent facilement être calculées; on trouve en effet en résolvant ces équations par rapport à $h$ :

$$h = \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}} = \frac{1}{\varepsilon_3 \sqrt[6]{\pi}} = \frac{1}{\varepsilon_4} \sqrt[4]{\frac{1.3}{2.2}} = \frac{1}{\varepsilon_5} \sqrt[5]{\frac{1.2}{\sqrt{\pi}}} \quad (25)$$

25. Le calcul de $h$ par ces différentes formes est propre à nous éclairer sur la justesse de la loi des erreurs que nous avons trouvée; en effet, si cette loi est exacte, nous devons obtenir la même valeur pour $h$, quelle que soit la forme que nous adoptions pour le calcul; c'est ce que l'on trouve au moins approximativement lorsqu'on applique les équations (25) à des séries d'un nombre considérable d'observations bien faites. On peut encore, même lorsque les observations ne sont pas en très-grand nombre, pourvu qu'elles aient été faites avec soin, obtenir un accord sinon complet du moins suffisant pour justifier la confiance que mérite la loi exprimée par l'équation (9); nous en verrons plus tard quelques exemples.

Cependant comme les observations ne sont jamais en nombre assez grand pour que l'accord devienne absolu, il est important de rechercher, parmi les formes (25) obtenues pour $h$, celle qui donne de cette constante la valeur la plus plausible, et de déterminer en même temps l'incertitude probable dont est affectée cette valeur.

26. Dans ce but considérons l'équation (12) n° 13 savoir :

$$W = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-h^2(\Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots)}$$

Cette expression de la probabilité des erreurs doit être rendue la plus grande possible, et c'est cette condition qui nous a conduits aux équations qui fixent la valeur des inconnues. La résolution de ces équations permet ensuite d'évaluer les erreurs $\Delta'$, $\Delta''$ .... Si nous représentons comme plus haut par $(\varepsilon_2)^2$ la moyenne de leurs carrés, nous pourrons écrire l'équation (12) sous la forme :

$$W = i^m h^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-mh^2 \varepsilon_2^2}$$

Or dans cette équation tout est connu sauf W et $h$, et si nous voulons en déduire la valeur de cette dernière constante, nous

devons choisir celle qui donne à W la plus grande valeur. Nous devons donc poser :

$$\frac{dW}{dh}=0 \qquad \text{ou} \qquad 0=1-2h^2(\varepsilon_2)^2 \qquad \text{d'où} \quad h=\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}$$

Ce résultat montre que la valeur de $h$ la plus probable est celle que l'on tire de la moyenne du carré des erreurs. Désignons cette valeur par H et proposons-nous de calculer son erreur probable. Pour cela comparons la probabilité W que la valeur de $h$ soit égale à H, à la probabilité W′ que cette valeur soit $H+\Delta$.

Nous aurons :

$$W=i^m H^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-\frac{m}{2}}$$

$$W'=i^m (H+\Delta)^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-m\varepsilon_2^2(H+\Delta)^2}$$

ou en remplaçant $\varepsilon_2^2$ par sa valeur $\frac{1}{2H^2}$ :

$$W'=i^m (H+\Delta)^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-\frac{m}{2}\left(1+\frac{\Delta}{H}\right)^2}$$

Observons que l'on a :

$$(H+\Delta)^m=H^m\left(1+\frac{\Delta}{H}\right)^m=H^m e^{m\lg\left(1+\frac{\Delta}{H}\right)}=H^m e^{m\left(\frac{\Delta}{H}-\frac{\Delta^2}{2H^2}+\frac{\Delta^3}{3H^3}+\dots\right)}$$

donc :

$$W'=i^m H^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-m\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta}{H}+\frac{\Delta^2}{2H^2}\right)-\left(\frac{\Delta}{H}-\frac{\Delta^2}{2H^2}+\frac{\Delta^3}{3H^3}-\frac{\Delta^4}{4H^4}+\frac{\Delta^5}{5H^5}+\dots\right)\right\}}$$

ou :

$$W'=i^m H^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-m\left\{\frac{1}{2}+\frac{\Delta^2}{H^2}-\frac{\Delta^3}{3H^3}-\frac{\Delta^4}{4H^4}+\frac{\Delta^5}{5H^5}-\dots\right\}}$$

Donc :

$$W:W'=i^m H^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-\frac{m}{2}} : i^m H^m \pi^{-\frac{1}{2}m} e^{-m\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta^2}{H^2}-\frac{\Delta^3}{5H^3}+\frac{\Delta^4}{4H^4}-\frac{\Delta^2}{5H^5}..\right)}$$

ou :

$$W:W'=1:e^{-\frac{m\Delta^2}{H^2}\left(1-\frac{\Delta}{3H}+\frac{\Delta^2}{4H^2}-\frac{\Delta^3}{5H^3}+..\right)}$$

Le dernier terme de cette proportion en raison de la grande valeur de $m$ ne pourra devenir sensible que si $\frac{\Delta}{H}$ est très-petit et

dans ce cas la série très-convergente qui forme le second facteur de l'exposant de $e$ se réduit à son premier terme; la proportion devient donc :

$$W : W' = 1 : e^{-\frac{m\Delta^2}{H^2}}$$

Par conséquent dans la détermination $h=H$, la probabilité d'une erreur nulle est à la probabilité d'une erreur $\Delta$ (W : W') comme 1 est à $e^{-\frac{m}{H^2}\Delta^2}$; donc d'après le principe du n° 20 la mesure du degré de précision de cette détermination est égale à $\frac{\sqrt{m}}{H}$; en sorte que l'erreur probable de H est égale à $\frac{\rho H}{\sqrt{m}}$ d'après l'équation (20). On a donc :

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}} \pm \frac{\rho}{\varepsilon_2\sqrt{2m}}$$

ou :

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left(1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right) \qquad (26)$$

ce qui doit s'entendre dans ce sens : 1° que la valeur la plus probable de $h$ est $\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}$ et 2° qu'il y a *un* contre *un* à parier que la valeur exacte est comprise entre :

$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right)$$

Si l'on reporte cette valeur de $h$ dans l'expression de l'erreur probable donnée par l'équation (20), on trouve que cette erreur probable a pour valeur :

$\varepsilon = \frac{\rho\varepsilon_2\sqrt{2}}{1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{m}}}$ ou, en négligeant les puissances de $\frac{\rho}{\sqrt{m}}$ supérieures à la première :

$$\varepsilon = \rho\varepsilon_2\sqrt{2}\left(1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right) = 0{,}6744897\,\varepsilon_2\left(1 \pm \frac{0{,}4769363}{\sqrt{m}}\right) \qquad (27)$$

27. L'importance qui résulte de cette analyse pour l'erreur $\varepsilon_2$ lui a mérité une attention particulière. GAUSS la nomme l'*erreur moyenne à craindre* ou l'*erreur moyenne*. Nous rappelons que c'est

la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs. Sa valeur se déduit, par un calcul relativement peu onéreux, du résultat final auquel la méthode conduit et de quantités auxiliaires dont elle exige la détermination.

Les géomètres français nomment $\varepsilon$ *l'erreur moyenne;* c'est une locution qui devrait être écartée, afin de ne pas introduire de confusion; la véritable erreur moyenne est la moyenne arithmétique de toutes les erreurs considérées avec leur valeur absolue, en faisant abstraction de leur signe; c'est cette moyenne que nous avons désignée par $\varepsilon_1$ dans les nos 23 et 24. Nous adopterons pour éviter toute méprise les dénominations suivantes:

$\varepsilon$ erreur probable.

$\varepsilon_1$ moyenne des erreurs.

$\varepsilon_2$ erreur moyenne à craindre.

28. Nous devons présenter ici une observation qui a quelque importance. La détermination de $h$ et par suite celle de $\varepsilon$ ont pour but de nous éclairer sur l'incertitude du résultat que nous déduisons de nos expériences. Mais la valeur de $h$ se déduit de celle de $\varepsilon_2$ (no 26), et celle-ci à son tour s'obtient au moyen des erreurs que l'on calcule en remplaçant dans les équations de condition, les inconnues qu'elles renferment par les valeurs trouvées. Les valeurs des inconnues, obtenues en rendant minimum la somme des carrés des erreurs, sont bien pour nous les plus probables, mais elles ne sont pas la vérité absolue. Or tout changement que l'on fera subir à la valeur des inconnues rendra plus grande la somme des carrés des erreurs calculées, par conséquent augmentera la valeur de $\varepsilon_2$ et diminuera la valeur de $h$. Supposons qu'il n'y ait qu'une seule inconnue $x$ et que le calcul nous ait donné pour sa valeur:

$$x=A$$

et admettons que la vraie valeur soit:

$$x=A+\delta$$

Toutes nos erreurs calculées se trouveront altérées de $\delta$ et la vraie somme des carrés des erreurs $m(\varepsilon_2)^2$ au lieu d'être

$$\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots=\Sigma(\Delta'^2)$$

sera :

$$(\Delta' \pm \delta)^2 + (\Delta'' \pm \delta)^2 + \ldots\ldots = \Sigma(\Delta'^2) \pm 2\delta\Sigma(\Delta') + m\delta^2$$

mais on a : $\Sigma(\Delta') = 0$; donc la somme précédente se réduit à : $\Sigma(\Delta'^2) + m\delta^2$; en sorte que $\varepsilon_2$ doit être déduit de l'équation :

$$m(\varepsilon_2)^2 = \Sigma(\Delta'^2) + m\delta^2$$

Mais quelle valeur convient-il d'attribuer à $\delta$? Observons que c'est l'erreur commise sur la détermination $x = \mathrm{A}$ et que cette détermination a un poids égal à $m$ et une précision relative égale à $\sqrt{m}$. Or si nous voulions tenir compte d'une observation isolée nouvelle, sans que nous soyons renseignés sur l'erreur dont elle est affectée, nous prendrions comme valeur la plus probable du carré de cette erreur la valeur moyenne $\varepsilon_2^2$. Mais la valeur A trouvée pour $x$, a un poids représenté par $m$; l'erreur dont cette valeur est affectée doit être plus petite que l'erreur de l'observation isolée dont nous parlions, dans le rapport de $\sqrt{m}$ à 1, nous devons donc prendre $\delta = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{m}}$ ou $\delta^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{m}$ ou $m\delta^2 = \varepsilon_2^2$; l'équation précédente devient donc :

$$m\varepsilon_2^2 = \Sigma(\Delta'^2) + \varepsilon_2^2 \quad \text{d'où :}$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta'^2)}{m-1}} \qquad (28)$$

On voit par là que, *pour trouver la vraie valeur de l'erreur moyenne à craindre dans une série de* m *observations destinées à faire connaître la valeur d'une inconnue, l'on doit considérer la somme des carrés des erreurs calculées comme appartenant non à* m, *mais à* m—1 *observations.*

M. Encke, outre la démonstration précédente, donne de ce précepte une raison métaphysique qu'il est utile de connaître, parce qu'elle montre la convenance et le moyen de le généraliser pour le cas de plusieurs inconnues. Lorsque $\mu$ inconnues sont assujetties à satisfaire à $\mu$ équations approximatives indépendantes les unes des autres, les inconnues sont toutes déterminées et il est absolument impossible d'avoir la moindre donnée sur les erreurs qui ont pu avoir lieu. Si le nombre des équations est $m$ et que l'on ait $m > \mu$, l'on pourra, après avoir consacré $\mu$ de ces équations à

la détermination des inconnues, évaluer au moyen des $m-\mu$ autres équations un pareil nombre d'erreurs qui jetteront quelque jour sur l'exactitude du résultat. Mais comme on ne peut pas, parmi toutes les équations, faire un choix rationnel de $\mu$ d'entre elles pour les considérer comme l'expression de la vérité absolue, on est conduit à disposer le calcul de manière à les faire toutes, sans exception, concourir à la détermination ; mais on ne se soustrait pas par là, à la nécessité analytique de consacrer $\mu$ équations tirées de l'ensemble de toutes, à l'évaluation des inconnues. Par conséquent, les fonctions des erreurs qui surgiront du calcul, ne se rapporteront pas à $m$, mais à $m-\mu$ erreurs. Dans le cas spécial, examiné plus haut, il n'y a qu'une inconnue et $m-\mu$ devient $m-1$.

---

## CHAPITRE IV.

### Vérification par l'expérience, de la loi des erreurs.

29. On peut contrôler de plusieurs manières, par les faits observés, la loi exprimée par l'équation (9). Nous présenterons dans ce chapitre quelques exemples de cette vérification.

L'équation (18) n° 17 indique le nombre relatif d'erreurs inférieures à $a$, si l'on intègre le second membre jusqu'à la limite $ah$. Il en résulte que, lorsque $h$ est connue, on peut, au moyen de la table que nous donnons, calculer le nombre relatif des erreurs inférieures à $a$, à $2a$, à $3a$, etc. et par soustraction, le nombre des erreurs comprises entre 0 et $a$, entre $a$ et $2a$, entre $2a$ et $3a$, et ainsi de suite. On peut ensuite comparer le résultat théorique, déduit ainsi de la loi des erreurs, avec les faits tels que l'observation les a créés.

On trouve quelques exemples de ce calcul dans les *Fundamenta astronomiæ* de Bessel, page 19 et 20. En calculant 300 observations de déclinaisons des étoiles *Aldébaran*, *Bételgueux*, *Sirius*, *Procyon*, *Arcturus* et *Altaïr* par Bradley, il a trouvé pour valeur de $\iota=0'',98$. Il en résulte $h=0,48667$ et en faisant $a=0'',4$ on trouve $ah=0,194668$. En prenant ce dernier nombre et ses mul-

tiples comme arguments, et en déterminant par la table les valeurs correspondantes de $P_a$ on trouve que la fréquence relative ou la probabilité d'une erreur

| | | | |
|---|---|---|---|
| moindre que | | 0″,4 | = 0,217 |
| » | » | 0″,8 | = 0,419 |
| » | » | 1″,2 | = 0,591 |
| » | » | 1″,6 | = 0,729 |
| » | » | 2″,0 | = 0,831 |
| » | » | 2″,4 | = 0,901 |
| » | » | 2″,8 | = 0,946 |
| » | » | 3″,2 | = 0,972 |
| » | » | 3″,6 | = 0,987 |
| » | » | 4″,0 | = 0,994 |
| plus grande que | | 4″,0 | = 0,006 |

Il en résulte que la fréquence relative ou la probabilité d'une erreur comprise entre 0″,0 et 0″,4 = 0,217

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| erreur comprise entre | | 0″,0 | et | 0″,4 | = 0,217 |
| » | » | 0″,4 | » | 0″,8 | = 0,202 |
| » | » | 0″,8 | » | 1″,2 | = 0,172 |
| » | » | 1″,2 | » | 1″,6 | = 0,138 |
| » | » | 1″,6 | » | 2″,0 | = 0,102 |
| » | » | 2″,0 | » | 2″,4 | = 0,070 |
| » | » | 2″,4 | » | 2″,8 | = 0,045 |
| » | » | 2″,8 | » | 3″,2 | = 0,026 |
| » | » | 3″,2 | » | 3″.6 | = 0,015 |
| » | » | 3″,6 | » | 4″,0 | = 0,007 |
| plus grande que | | 4″,0 | » | | = 0,006 |

si l'on multiplie ces différents résultats par 300, nombre absolu des observations, on obtient la répartition théorique des erreurs telle que l'établit la loi, et en comparant aux faits, cette répartition, l'on trouve le tableau suivant :

| Nombre des erreurs | | | | par le calcul | par l'expérience |
|---|---|---|---|---|---|
| entre | 0″,0 | et | 0″,4 | 65 | 66 |
| » | 0″,4 | » | 0″,8 | 60 | 58 |
| » | 0″,8 | » | 1″,2 | 52 | 55 |
| » | 1″,2 | » | 1″,6 | 41 | 28 |
| » | 1″,6 | » | 2″,0 | 31 | 27 |

| Nombre des erreurs | | | | par le calcul | par l'expérience |
|---|---|---|---|---|---|
| entre | 2",0 | et | 2",4 | 21 | 23 |
| » | 2",4 | » | 2",8 | 13 | 10 |
| » | 2",8 | » | 3",2 | 8 | 15 |
| » | 3",2 | » | 3",6 | 5 | 8 |
| » | 3",6 | » | 4",0 | 2 | 4 |
| au-dessus de | | | 4",0 | 2 | 6 |

Dans un second exemple, développé par Bessel et relatif à 300 observations d'ascensions droites de différentes étoiles comparées entre elles, il trouve :

| Nombre des erreurs | | | | par le calcul | par l'expérience |
|---|---|---|---|---|---|
| entre | $0^s,0$ | et | $0^s,1$ | 107 | 114 |
| » | $0^s,1$ | » | $0^s,2$ | 87 | 84 |
| » | $0^s,2$ | » | $0^s,3$ | 57 | 53 |
| » | $0^s,3$ | » | $0^s,4$ | 30 | 24 |
| » | $0^s,4$ | » | $0^s,5$ | 13 | 14 |
| » | $0^s,5$ | » | $0^s,6$ | 5 | 6 |
| » | $0^s,6$ | » | $0^s,7$ | 1 | 3 |
| » | $0^s,7$ | » | $0^s,8$ | 0 | 1 |
| » | $0^s,8$ | » | $0^s,9$ | 0 | 1 |

Enfin dans un troisième exemple, dans lequel il rapporte 470 observations d'ascensions droites de Sirius et de Altaïr, comparés au soleil, il trouve :

| Nombre des erreurs | | | | par le calcul | par l'observation |
|---|---|---|---|---|---|
| entre | $0^s,0$ | et | $0^s,1$ | 95 | 94 |
| » | $0^s,1$ | » | $0^s,2$ | 89 | 88 |
| » | $0^s,2$ | » | $0^s,3$ | 78 | 78 |
| » | $0^s,3$ | » | $0^s,4$ | 64 | 58 |
| » | $0^s,4$ | » | $0^s,5$ | 50 | 51 |
| » | $0^s,5$ | » | $0^s,6$ | 36 | 36 |
| » | $0^s,6$ | » | $0^s,7$ | 24 | 26 |
| » | $0^s,7$ | » | $0^s,8$ | 15 | 14 |
| » | $0^s,8$ | » | $0^s,9$ | 9 | 10 |
| » | $0^s,9$ | » | $1^s,0$ | 5 | 7 |
| plus grandes que | | | $1^s$. | 5 | 8 |

L'accord n'est pas absolu, sans doute, mais il est assez frappant, surtout dans ce dernier tableau où le nombre des observations

était plus considérable, pour inspirer un grand degré de confiance à la loi des erreurs exprimée par l'équation (9).

30. On peut obtenir une autre vérification en calculant la valeur de *h* par les différentes formes du n° 24 éq. (25). Mais Bessel n'ayant pas donné les valeurs individuelles des erreurs dans les recherches rapportées plus haut, nous choisirons un autre exemple dans ce but. Nous prendrons les observations suivantes du diamètre du grand axe de l'anneau extérieur de Saturne faites au micromètre à double image par le professeur Kaiser à Leyde (*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London*, t. XVI, page 147).

| N° | 1856 | | T. m. de Leyde. | | Grand axe observé. | Gr. axe réduit à la dist. moyenne. | Ecarts de la moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Mars | 10 | 9 h. | 23 m | 42″,26 | 39″,46 | — 0,053 |
| 2 | » | — | 9 | 43 | 42″,12 | 39″,33 | — 0,183 |
| 3 | » | 25 | 8 | 50 | 40″,87 | 39″,23 | — 0,283 |
| 4 | » | — | 9 | 35 | 41″,05 | 39″,40 | — 0,113 |
| 5 | » | — | 10 | 12 | 41″,06 | 39″,41 | — 0,103 |
| 6 | » | 26 | 7 | 15 | 41″,21 | 39″,62 | + 0,107 |
| 7 | » | — | 9 | 17 | 41″,30 | 39″,71 | + 0,197 |
| 8 | » | — | 10 | 6 | 41″,20 | 39″,61 | + 0,097 |
| 9 | » | 27 | 8 | 32 | 41″,02 | 39″,51 | — 0,003 |
| 10 | » | — | 9 | 41 | 41″,14 | 39″,63 | + 0,117 |
| 11 | » | — | 10 | 12 | 41″,21 | 39″,69 | + 0,177 |
| 12 | » | 28 | 7 | 40 | 40″,96 | 39″,52 | + 0,007 |
| 13 | » | — | 8 | 57 | 40″,65 | 39″,22 | — 0,293 |
| 14 | » | — | 10 | 0 | 40″,93 | 39″,49 | — 0,023 |
| 15 | » | 29 | 7 | 20 | 40″,80 | 39″,44 | — 0,073 |
| 16 | » | — | 8 | 40 | 41″,07 | 39″,70 | + 0,187 |
| 17 | » | 30 | 7 | 20 | 40″,99 | 39″,69 | + 0,177 |
| 18 | » | — | 8 | 40 | 40″,86 | 39″,56 | + 0,047 |
| 19 | » | 31 | 7 | 20 | 40″,73 | 39″,50 | — 0,013 |
| 20 | » | — | 8 | 35 | 40″,77 | 39″,54 | + 0,027 |
| | | | | | moyenne | 39″,513 | |

Si l'on écrit les différentes erreurs en les rangeant par ordre de grandeur et en faisant abstraction de leurs signes, on obtient le

tableau suivant, dans lequel nous avons placé les quatre premières puissances des erreurs, afin de pouvoir calculer la valeur de $h$ par différentes voies.

| N° | $\Delta_1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 0,003 | 0,000009 | 0,000000027 | 0,000000000081 |
| 12 | 0,007 | 049 | 343 | 2401 |
| 19 | 0,013 | 169 | 0,000002197 | 0,000000028561 |
| 14 | 0,023 | 529 | 12167 | 279841 |
| 20 | 0,027 | 729 | 19683 | 531441 |
| 18 | 0,047 | 0,002209 | 0,000103823 | 0,000004879681 |
| 1 | 0,053 | 2809 | 148877 | 007890481 |
| 15 | 0,073 | 5329 | 389017 | 028398241 |
| 8 | 0,097 | 9409 | 912673 | 088529281 |
| 5 | 0,103 | 0,010609 | 0,001092727 | 112550881 |
| 6 | 0,107 | 11449 | 1225043 | 131079601 |
| 4 | 0,113 | 12769 | 1442897 | 163047361 |
| 10 | 0,117 | 13689 | 1601613 | 187388721 |
| 11 | 0,177 | 31329 | 5545233 | 981506241 |
| 17 | 0,177 | 31329 | 5545233 | 981506241 |
| 2 | 0,183 | 33489 | 6128487 | 0,001121513121 |
| 16 | 0,187 | 34969 | 6539203 | 1222830961 |
| 7 | 0,197 | 38809 | 7645373 | 1506138481 |
| 3 | 0,283 | 80089 | 0,022665187 | 6414247921 |
| 13 | 0,293 | 85849 | 25153757 | 7370050801 |
| | 2,280 | 0,405620 | 0,086173560 | 0,020322400340 |

En divisant toutes ces sommes par $19=m-1$, et en prenant les racines, on obtient (n° 28) :

$$\varepsilon_1=0'',1200 \quad \varepsilon_2=0'',1463 \quad \varepsilon_3=0'',1655 \quad \varepsilon_4=0'',1808.$$

En calculant la valeur de $h$ par la formule (26) on trouve :

$$h=4,8336\ (1\pm0,10665)$$

ce qui donne pour limites probables 5,3491 et 4,3181.

Si maintenant nous calculons $h$ par les différentes formes (25) nous trouvons :

$$h=4,7016\ ;\ h=4,8336\ ;\ h=4,9919\ ;\ h=5,1459$$

On voit que, malgré le petit nombre des observations, ces valeurs présentent un accord très-satisfaisant, la tendance qu'elles présentent vers des valeurs de plus en plus grandes à mesure que l'on prend les ordres plus élevés de $\varepsilon_n$ finirait plus tard par disparaître.

Si au moyen de la valeur trouvée pour $h$ on calcule la valeur de $\varepsilon$ par la formule (20); ou si, ce qui revient au même, on emploie l'équation (27) on trouve

$$\varepsilon = 0{,}09867 \pm 0{,}01052$$

en sorte que l'erreur probable d'une détermination isolée est comprise entre les limites

$$0'',1092 \quad \text{et} \quad 0'',0882.$$

Si l'on avait déterminé l'erreur probable directement par l'inspection du tableau des erreurs, on l'aurait trouvée comprise entre 0'',103 et 0'',107, c'est-à-dire égale à :

$$0'',105$$

résultat qui ne diffère presque pas de celui du calcul.

Si l'on voulait dans cet exemple faire à l'égard de la distribution des erreurs une recherche analogue à celles qui font le sujet du n° précédent, on calculerait la valeur de $ah$ en attribuant à $a$ une valeur déterminée. Faisons par exemple $a=0'',10$ on aura $ah=0{,}48336$ et au moyen de la table on trouve pour le nombre relatif des erreurs :

| | | | |
|---|---|---|---|
| moindres que | 0'',10 | = | 0,5058 |
| » | 0 ,20 | = | 0,8284 |
| » | 0'',30 | = | 0,9597 |
| au-dessus de | 0'',30 | = | 0,0403 |

Il en résulte une fréquence relative

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| entre | 0'',00 | et | 0'',10 | = | 0,5058 |
| » | 0'',10 | » | 0'',20 | = | 0,3226 |
| » | 0'',20 | » | 0'',30 | = | 0,1313 |
| | au delà de | | 0'',30 | = | 0,0403 |

En multipliant ces nombres par 20, nombre des observations, on trouve les résultats suivants en regard desquels nous plaçons ceux que l'observation a fournis :

| Nombre des erreurs | | | | par le calcul : | par l'expérience : |
|---|---|---|---|---|---|
| comprises entre | 0",00 | et | 0",10 | 10 | 9 |
| » » | 0",10 | » | 0",20 | $6\frac{1}{2}$ | 9 |
| » » | 0",20 | » | 0",30 | $2\frac{1}{2}$ | 2 |
| au delà de | 0",30 | | | 1 | 0 |

Pour achever la discussion de ces observations, nous pouvons calculer le degré d'incertitude dont est affecté le résultat :

$$x = 39'',513$$

Dans ce but comme l'erreur probable d'une observation isolée est :

$$\varepsilon = 0'',09867$$

l'erreur probable de $x$ dont le poids est égal à 20 sera :

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{20}} = 0'',0220$$

On aura donc :

$$x = 39'',513 \pm 0'',022.$$

Ce qui veut dire que la valeur la plus probable qui résulte de ces observations pour le diamètre du grand axe de l'anneau de Saturne est 39",513 avec une incertitude de 0",022 qui fait osciller cette détermination entre 39",491 et 39",535.

L'accord que nous avons trouvé entre les faits et la théorie dans la discussion de ces dernières observations est sans doute très-loin d'être absolu. En choisissant une série plus complète, nous serions arrivés à une concordance plus satisfaisante ; mais cet exemple que nous avons pris au hasard, nous a semblé suffisant pour diriger le calculateur dans des recherches analogues, et l'accord entre le calcul et l'observation assez grand, en raison du nombre restreint des observations, pour que nous puissions le considérer comme un argument de nature à appuyer la justesse de la loi des erreurs.

# CHAPITRE V.

## Du poids de la détermination dans le cas de plusieurs inconnues.

31. Les principes que nous avons établis dans le chapitre III, sont suffisants pour déterminer l'incertitude du résultat lorsque les observations ont pour but de fixer directement la valeur d'un seul élément numérique; nous en avons vu un exemple dans le chapitre précédent. Mais il arrive le plus fréquemment que les observations sont destinées à fixer à la fois un certain nombre d'inconnues, et pour parvenir dans ce cas à déterminer le poids ou l'erreur probable de chacune des valeurs obtenues, on est appelé à recourir à des principes auxiliaires que nous nous proposons de développer dans ce chapitre.

Désignons par $\omega$ une fonction des erreurs $\Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots$ de la forme:

$$(29)\quad \omega = A.(\Delta')^{\alpha}(\Delta'')^{\beta}(\Delta''')^{\gamma}\ldots. + B(\Delta')^{\alpha'}(\Delta'')^{\beta'}(\Delta''')^{\gamma'}\ldots + C(\Delta')^{\alpha''}(\Delta'')^{\beta''}(\Delta''')^{\gamma''}\ldots + \text{etc.}$$

La probabilité que $\omega$ soit comprise entre $a$ et $b$ sera donnée par l'intégrale multiple:

$$P = \int \varphi(\Delta')\,\varphi(\Delta'')\ldots.\, d\Delta'.\, d\Delta''\ldots\ldots \qquad (30)$$

étendue à toutes les valeurs de $\Delta', \Delta'', \ldots$ pour lesquelles $\omega$ est compris entre $a$ et $b$. Or cette même probabilité peut être exprimée d'une autre manière; nommons en effet $\psi(y)\,dy$ la probabilité d'une valeur $y$ de $\omega$, on aura :

$$P = \int_a^b \psi(y)\,dy = \int_a^b \psi(\omega)\,d\omega \qquad (31)$$

Or, d'après l'équation (29) l'une des erreurs $\Delta'$ peut être considérée comme une fonction de $\omega$ et de toutes les autres erreurs; supposons qu'en la résolvant nous trouvions:

$$\Delta' = f(\omega, \Delta'', \Delta'''\ldots) = f$$

nous en tirerons :

$$d\Delta' = \frac{df}{d\omega} . d\omega$$

parce que toutes les erreurs $\Delta'$ $\Delta''$ $\Delta'''$ ... sont indépendantes entre elles. En substituant ces valeurs dans l'équation (30) elle devient :

$$P = \int \varphi(f) \frac{df}{d\omega} . \varphi(\Delta'') . \varphi(\Delta''') \ldots d\Delta'' . d\Delta''' \ldots d\omega. \qquad (32)$$

où $\omega$ doit varier de $a$ à $b$ et les autres variables $\Delta''$, $\Delta'''$ ... reçoivent toutes les valeurs pour lesquelles $f$ est réel.

En comparant les équations (31) et (32) on en déduit :

$$\psi(\omega) = \int \varphi(f) \frac{df}{d\omega} . \varphi(\Delta'')\varphi(\Delta''') \ldots . d\Delta'' . d\Delta''' \ldots \qquad (33)$$

Intégrale multiple dans laquelle $\omega$ devra être considérée comme constante, les variables $\Delta''$, $\Delta'''$ ... devant recevoir toutes les valeurs pour lesquelles $f$ est réelle.

**32.** L'intégrale (32) ne peut être obtenue en général, en raison de la détermination de $f$ qui n'est possible que dans des cas spéciaux ; mais si l'on demandait non plus la probabilité de $\omega$, mais la valeur moyenne de cette variable, on parviendrait facilement à la trouver ; en effet, en désignant par M cette valeur, il faudrait d'après l'équation (31) intégrer entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ la fonction suivante :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega . \psi(\omega) \, d\omega. \qquad (34)$$

Or si dans cette équation on remplace $\psi(\omega)$ par sa valeur (33) et si l'on remplace dans le résultat :

$$\varphi(f) \frac{df}{d\omega} d\omega \quad \text{par sa valeur} \quad \varphi(\Delta') \, d\Delta'$$

on obtient :

$$M = \int \omega . \varphi(\Delta')\varphi(\Delta'') \ldots . d\Delta' . d\Delta'' \ldots\ldots$$

L'intégration devant être étendue de $-\infty$ à $+\infty$ pour toutes

les variables $\Delta', \Delta''\ldots$ Or en remplaçant $\omega$ par sa valeur (29) on aura en isolant les différentes intégrations :

$$M = A\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta')^{\alpha}\varphi(\Delta')\,d\Delta'\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta'')^{\beta}\varphi(\Delta'')\,d\Delta''\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta''')^{\gamma}\varphi(\Delta''')\,d\Delta'''\ldots\ldots$$

$$+ B\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta')^{\alpha'}\varphi(\Delta')\,d\Delta'\int(\Delta'')^{\beta'}\varphi(\Delta'')\,d\Delta''\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta''')^{\gamma'}\varphi(\Delta''')\,d\Delta'''\ldots\ldots$$

$$+ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais chacune des intégrales est la moyenne d'une puissance particulière des erreurs, en sorte que par exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta')^{\alpha}\varphi(\Delta')\,d\Delta'$$

est la moyenne de $(\Delta')^{\alpha}$ qui est égale à $\varepsilon_{\alpha}^{\alpha}$ ; on a donc enfin :

$$M = A\varepsilon_{\alpha}^{\alpha}\,\varepsilon_{\beta}^{\beta}\,\varepsilon_{\gamma}^{\gamma}\ldots + B\varepsilon_{\alpha'}^{\alpha'}.\,\varepsilon_{\beta'}^{\beta'}.\,\varepsilon_{\gamma'}^{\gamma'}. + C\varepsilon_{\alpha''}^{\alpha''}.\,\varepsilon_{\beta''}^{\beta''}.\,\varepsilon_{\gamma''}^{\gamma''}\ldots\ldots \quad (35)$$

C'est-à-dire que la valeur moyenne de $\omega$ est égale à une somme de termes déduits de ceux même qui composent $\omega$, en $y$ remplaçant $(\Delta')^{\alpha}$, $(\Delta'')^{\beta}\ldots$ par leurs valeurs moyennes.

33. Nous verrons plus tard que les valeurs des inconnues, déduites des observations par la méthode des moindres carrés, se présentent toujours sous la forme suivante :

$$x = \alpha k + \alpha' k' + \alpha'' k'' + \ldots\ldots \quad (36)$$

$\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$ étant des quantités numériques et $k, k', k'', \ldots$ des valeurs déduites d'observations toutes également précises dont le poids est pris pour unité.

Désignons par $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$ les erreurs dont sont affectées les quantités $k, k', k''\ldots$ et par X l'erreur de $x$, nous aurons en vertu de l'équation (36) :

$$X = \alpha\Delta + \alpha'\Delta' + \alpha''\Delta'' + \ldots\ldots \quad (37)$$

Si nous voulons la valeur moyenne de X que nous appellerons $X_1$, nous devrons remplacer chaque erreur $\Delta$, $\Delta'$,.. par sa valeur moyenne $\varepsilon_1$ d'après le principe du n° précédent, donc :

$$X_1=(\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots)\,\varepsilon_1$$

mais $\varepsilon_1=0$ (n° 23) donc :

$$X_1=0. \qquad (38)$$

Pour obtenir la valeur moyenne du carré des erreurs, il faut élever au carré l'équation (37), prendre la valeur moyenne du résultat et en extraire la racine carrée. On trouve :

$$X^2=\alpha^2\Delta^2+\alpha'^2\Delta'^2+\alpha''^2\Delta''^2+\ldots.$$
$$+2\alpha\alpha'\Delta\Delta'+2\alpha\alpha''\Delta\Delta''+2\alpha'\alpha''\Delta'\Delta''+\ \ldots$$

Pour obtenir la valeur moyenne de $X^2$ que nous désignerons par $X_2^2$ nous remplacerons, d'après le théorème précédent, dans chaque terme de $X^2$, les puissances des erreurs par leurs valeurs moyennes savoir : $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$.. par $\varepsilon_1=0$ et $\Delta^2$, $\Delta'^2$, $\Delta''^2$, ... par $\varepsilon_2^2$ il viendra, ainsi :

$$X_2^2=(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots)\,\varepsilon_2^2=[\alpha^2]\,\varepsilon_2^2 \qquad (39)$$

en adoptant la notation indiquée au n° 14.

Donc : $$X_2=\varepsilon_2\sqrt{[\alpha^2]}$$

Nous concluons de là que l'erreur moyenne à craindre sur la valeur de $x$, est égale à $\varepsilon_2\sqrt{[\alpha^2]}$ ; que par conséquent le poids d'une observation isolée étant l'unité, celui de la valeur de $x$ déduite par la méthode des moindres carrés sera $\frac{1}{[\alpha^2]}$ et l'erreur probable :

$$\rho\varepsilon\ \sqrt{2}.\sqrt{[\alpha^2]}$$

En sorte que si l'on fait $A=\alpha k+\alpha' k'+\alpha'' k''\ldots$ on aura :

$$x=A\pm\rho\varepsilon_2\sqrt{2}.\sqrt{[\alpha^2]} \qquad (40)$$

On trouverait de même pour $y$ en supposant qu'on ait :

$$y=\beta k+\beta' k'+\beta'' k''+\ldots=B$$
$$y=B\pm\rho\varepsilon_2\sqrt{2}.\sqrt{[\beta^2]}. \qquad (40)$$

et ainsi pour les autres inconnues.

---

# CHAPITRE VI.

## Du calcul des équations finales et de leur résolution.

34. Nous avons vu dans le chapitre II que les équations de condition auxquelles les valeurs des inconnues doivent satisfaire de la manière la plus plausible, ont la forme indiquée par les équations (11). Il est indispensable que toutes les équations aient le même poids, c'est-à-dire que toutes les observations aient le même degré de précision, afin que les erreurs $\Delta$, $\Delta'$ $\Delta''$... puissent être considérées comme obéissant à la loi indiquée par l'équation (9) en attribuant à $h$ la même valeur pour toutes; car ce n'est que sous cette condition qu'elles donnent lieu à l'équation (12). Par conséquent, si quelques observations avaient un poids supérieur ou inférieur aux autres, il faudrait, avant de les faire entrer dans le calcul, multiplier les équations auxquelles elles donnent lieu par la racine carrée de leur poids comparatif. Ce travail préliminaire est étranger à la méthode et doit précéder son application. C'est à l'observateur à étudier dans chaque cas les circonstances des observations et à évaluer de la manière la plus exacte le degré de confiance que mérite chacune d'elles. Nous supposerons donc que les équations ont été préparées de manière que chacune d'elles ait un poids égal.

35. Nous devons encore présenter une remarque préliminaire sur un cas que la pratique peut faire rencontrer. Il peut arriver que parmi les équations de condition qui lient aux valeurs observées, les éléments que l'on veut déterminer, il s'en trouve auxquelles les observations doivent *rigoureusement* satisfaire. Dans ce cas on ne peut pas confondre ces relations avec les équations approximatives et les faire entrer à ce titre dans le calcul; mais il faut les utiliser pour éliminer un nombre égal des inconnues à déterminer. De cette manière les équations rigoureuses disparaissent, et le problème est ramené au cas général. Comme exemple relatif à ce cas, on peut citer les conditions par lesquelles dans un réseau

géodésique, la somme des angles d'un polygone fermé, doit être égale à la somme des angles du polygone plan correspondant, augmentée de l'excès sphérique, ou encore la somme des angles de suite autour d'un point doit être égale à quatre angles droits.

36. Considérons maintenant les équations à résoudre (11) et désignons-les par un chiffre nouveau :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} \Delta &= ax + by + cz + \ldots + k \\ \Delta' &= a'x + b'y + c'z + \ldots + k' \\ \Delta'' &= a''x + b''y + c''z + \ldots + k'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour en déduire les équations finales (16) au moyen des relations (15), le calcul ne peut présenter d'autres difficultés que sa longueur. On peut s'aider dans ce calcul, soit des tables des carrés des nombres, soit des tables de logarithmes; cependant lorsque les coefficients ne sont pas composés de plus de trois ou quatre chiffres, le calcul direct est peut-être plus rapide. Nous présenterons à cet égard une remarque qui nous semble importante. C'est que ce calcul doit être effectué avec plus de rigueur qu'on ne le fait communément, si l'on veut obtenir des résultats corrects. En effet, des négligences que l'on croit pouvoir se permettre sur des données qui au fond sont entachées d'erreurs, peuvent avoir sur la valeur des inconnues une influence qu'il est impossible de mesurer à l'avance; et il nous semble incontestable que le rôle du calcul doit se borner à tirer du résultat des expériences les conséquences qui s'en déduisent, sans y ajouter de nouvelles inexactitudes. Nous appelons donc l'attention des calculateurs sur la convenance d'effectuer toutes les opérations en conservant dans chacune d'elles une ou deux décimales de plus qu'il n'en doit figurer dans le résultat final.

Dans un calcul aussi long il est absolument nécessaire d'obtenir un contrôle, et ce qui semble le plus simple et en même temps le plus sûr, consiste à calculer outre les coefficients des équations (16) deux autres résultats, dont l'un sera d'ailleurs indispensable pour la détermination complète, savoir la somme des carrés des termes connus $k, k', k''\ldots$ des équations (I) et la somme des car-

rés de la somme algébrique des coefficients numériques de ces mêmes équations, c'est-à-dire :

$$[s^2]=s^2+s'^2+s''^2+\ldots \text{ en posant:}$$

$$s=a+b+c+\ldots+k$$
$$s'=a'+b'+c'+\ldots+k'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On calculera donc les quantités suivantes au nombre de $1+\frac{(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2}$

$$\text{(II)}\quad\begin{array}{ll} [a^2]=a^2+a'^2+a''^2+\ldots & [ab]=ab+a'b'+a''b''+\ldots \\ [b^2]=b^2+b'^2+b''^2+\ldots & [ac]=ac+a'c'+a''c''+\ldots \\ [c^2]=c^2+c'^2+c''^2+\ldots & [bc]=bc+b'c+b''c''+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ [k^2]=k^2+k'^2+k''^2+\ldots & [ak]=ak+a'k'+a''k''+\ldots \\ [s^2]=s^2+s'^2+s''^2+\ldots & [bk]=bk+b'k'+b''k''+\ldots \\ & [ck]=ck+c'k'+c''k''+\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ces quantités étant calculées, on obtient une preuve de l'exactitude de la détermination par l'équation identique à laquelle elles doivent satisfaire :

$$\text{(II)}'\quad \begin{array}{l}[s^2]=[a^2]+[b^2]+[c^2]+\ldots+[k^2] \\ +2\left\{[ab]+[ac]+[bc]+\ldots\ldots+[ak]+[bk]+[ck]+\ldots\ldots\right\}\end{array}$$

Cette comparaison peut se faire soit lorsque tous les calculs sont achevés, soit sur un certain nombre de résultats à mesure qu'on les obtient, par exemple de dix en dix, ou de vingt en vingt, etc.; par ce dernier moyen on parvient à localiser les fautes de calcul qu'on a pu commettre, et par conséquent à les découvrir plus facilement pour les corriger.

37. Lorsqu'on a formé ces différents coefficients, et qu'on s'est assuré qu'aucune erreur ne s'est glissée dans leur détermination, on obtient les équations finales suivantes (n° 14 (16)) :

$$\text{(III)}\quad\begin{array}{l}[a^2]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+\ldots\ldots+[ak]=0 \\ [ab]\,x+[b^2]\,y+[bc]\,z+\ldots\ldots+[bc]=0 \\ [ac]\,x+[bc]\,y+[c^2]\,z+\ldots\ldots+[ck]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Pour résoudre ces équations, le procédé d'élimination le plus convenable est celui des multiplicateurs indéterminés, parce qu'il fournit immédiatement les éléments nécessaires à l'évaluation de l'incertitude du résultat, évaluation qui constitue une partie importante de la recherche. Pour obtenir $x$ par exemple, nous multiplierons chacune des équations (III) par des facteurs tels, qu'en faisant la somme des produits obtenus, le coefficient de $x$ devienne l'unité et le coefficient de chacune des autres inconnues devienne nul. La détermination de $y$ et de chacune des autres inconnues aura lieu de la même manière par l'emploi d'autres systèmes de multiplicateurs. Convenons de représenter les multiplicateurs propres à la détermination de $x$ respectivement par les symboles :

$$[\alpha\alpha],\ [\alpha\beta],\ [\alpha\gamma]\ .\ [\alpha\delta]\ .....$$

la seconde lettre placée dans la parenthèse marquant, par son rang dans l'alphabet grec, le rang de l'équation multipliée, et la première se rapportant à l'ordre de l'inconnue $x$ qui est la première. En adoptant cette notation, qui sera justifiée plus tard, nous désignerons les multiplicateurs relatifs à la détermination de $y$ par :

$$[\beta\alpha],\ [\beta\beta],\ [\beta\gamma],\ [\beta\delta]\ ....$$

ceux relatifs à la détermination de $z$ par :

$$[\gamma\alpha],\ [\gamma\beta],\ [\gamma\gamma]\ .\ [\gamma\delta]$$

et ainsi de suite.

Ces multiplicateurs devront vérifier les équations suivantes :

(41)
$$\begin{aligned} &[a^2][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] + \ldots = 1 \\ &[ab][\alpha\alpha] + [b^2][\alpha\beta] + [bc][\alpha\gamma] + \ldots = 0 \\ &[ac][\alpha\alpha] + [bc][\alpha\beta] + [c^2][\alpha\gamma] + \ldots = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(42)
$$\begin{aligned} &[a^2][\beta\alpha] + [ab][\beta\beta] + [ac][\beta\gamma] + \ldots. = 0 \\ &[ab][\beta\alpha] + [b^2][\beta\beta] + [bc][\beta\gamma] + \ldots. = 1 \\ &[ac][\beta\alpha] + [bc][\beta\beta] + [c^2][\beta\gamma] + \ldots. = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(43)
$$\begin{aligned} &[a^2][\gamma\alpha] + [ab][\gamma\beta] + [ac][\gamma\gamma] + \ldots. = 0 \\ &[ab][\gamma\alpha] + [b^2][\gamma\beta] + [bc][\gamma\gamma] + \ldots. = 0 \\ &[ac][\gamma\alpha] + [bc][\gamma\beta] + [c^2][\gamma\gamma] + \ldots. = 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

**38.** Comme le nombre des multiplicateurs est, pour chacune d'elles, égal au nombre des inconnues, il semble que leur nombre total est $n^2$. Mais il est facile de voir que ces multiplicateurs ne sont pas indépendants; en effet, si nous multiplions le système (41) respectivement par $[\beta\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\beta\gamma]\ldots$ et si nous ajoutons les produits, nous aurons en vertu des équations (42):

$$[\alpha\beta]=[\beta\alpha]$$

Et une semblable démonstration aura lieu pour tous les multiplicateurs analogues, en sorte que $[\alpha\gamma]=[\gamma\alpha]$; $[\beta\gamma]=[\gamma\beta]$ etc. Le nombre des multiplicateurs différents est donc égal à $\frac{n(n+1)}{2}$ au lieu de $n^2$. Il suffira donc pour les déterminer de considérer une seule équation du système (41), deux du système (42), trois du suivant, et ainsi de suite jusqu'à $n$ équations du dernier système.

Entre les deux équations du système (42) nous pourrons éliminer $[\beta\alpha]$, en retranchant de la seconde le produit de la première par le rapport $\frac{[ab]}{[a^2]}$. ce qui conduira à un résultat de la forme:

$$[b^2.1][\beta\beta]+[bc.1][\beta\gamma]+[bd.1][\beta\delta]+\ldots\ldots=1$$

où: $[b^2.1]=[b^2]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ab]$; $[bc.1]=[bc]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ac]$ etc.

De même en éliminant $[\gamma\alpha]$ dans le système (43), en retranchant successivement de chacune des deux autres le produit de la première par $\frac{[ab]}{[a^2]}$, et par $\frac{[ac]}{[a^2]}$, on aura:

$$[b^2.1][\beta\gamma]+[bc.1][\gamma\gamma]+[bd.1][\gamma\delta]+\ldots=0$$
$$[bc.1][\beta\gamma]+[c^2.1][\gamma\gamma]+[cd.1][\gamma\delta]+\ldots=1$$

en posant de même:

$$[c^2,1]=[c^2]-\frac{[ac]}{[a^2]}[ac];\quad [cd.2]=[cd]-\frac{[ac]}{[a^2]}[ad]$$

Si entre ces deux dernières équations nous éliminons $[\beta\gamma]$ en retranchant de la seconde le produit de la première par $\frac{[bc.1]}{[b^2.1]}$ nous obtenons :

$$[c^2.2][\gamma\gamma] + [cd][\gamma\delta] + \ldots\ldots = 1$$

en posant :

$$[c^2.2] = [c^2.1] - \frac{[bc.1]}{[b^2.1]}[bc.1]$$

$$[cd.2] = [cd.1] - \frac{[bc.1]}{[b^2.1]}[bd.1]$$

. . . . . . . . . . .

En continuant de même jusqu'au dernier système et en poussant dans chacun d'eux l'élimination aussi loin que possible, nous ramènerons ainsi le dernier à une équation à une inconnue, deux équations à 2 inconnues, etc. *n* équations à *n* inconnues. Alors ne prenant que les premières équations de chacun des systèmes principaux et de chacun des systèmes secondaires qui s'en déduisent, nous aurons pour déterminer tous nos multiplicateurs les équations suivantes :

(IV)

(1) $[a^2][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ca][\alpha\gamma] + [ad][\alpha\delta] \ldots\ldots = 1$

(2)
$$[a^2][\alpha\beta] + [ab][\beta^2] + [ac][\beta\gamma] + [ad][\beta\delta] \ldots\ldots = 0$$
$$[b^2.1][\beta\beta] + [bc.1][\beta\gamma] + [bd.1][\beta\delta] + \ldots\ldots = 1$$

(3)
$$[a^2][\alpha\gamma] + [ab][\beta\gamma] + [ac][\gamma\gamma] + [ad][\gamma\delta] + \ldots = 0$$
$$[b^2.1][\beta\gamma] + [bc.1][\gamma\gamma] + [bd.1][\gamma\delta] + \ldots\ldots = 0$$
$$[c^2.1][\gamma\gamma] + [cd.2][\gamma\delta] + \ldots\ldots = 1$$

(4)
$$[a^2][\alpha\delta] + [ab][\beta\delta] + [ac][\gamma\delta] + [ad][\delta\delta] + \ldots = 0$$
$$[b^2.1][\beta\delta] + [bc.1][\gamma\delta] + [bd.1][\delta\delta] + \ldots\ldots = 0$$
$$[c^2.2][\gamma\delta] + [cd.2][\delta\delta] + \ldots\ldots = 0$$
$$[d^2.3][\delta\delta] + \ldots\ldots = 1$$

Équations dont les coefficients se calculent par les relations suivantes dont la symétrie est évidente:

$$
(1)\quad
\begin{array}{lll}
[b^2.1]=[b^2]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ab] & [c^2.1]=[c^2]-\frac{[ac]}{[a^2]}[ac] & [d^2.1]=[d^2]-\frac{[ad]}{[a^2]}[ad] \\
[bc.1]=[bc]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ac] & [cd.1]=[cd]-\frac{[ac]}{[a^2]}[ad] & [de.1]=[de]-\frac{[ad]}{[a^2]}[ae] \\
[bd.1]=[bd]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ad] & [ce.1]=[ce]-\frac{[ac]}{[a^2]}(ae) & \ldots\ldots\ldots \\
[be.1]=[be]-\frac{[ab]}{[a^2]}[ae] & \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}
$$

(V)

$$
(2)\quad
\begin{array}{ll}
[c^2.2]=[c^2.1]-\frac{[bc.1]}{[b^2.1]}[bc.1] & [d^2.2]=[d^2.1]-\frac{[bd.1]}{[b2.1]}[bd.1] \\
[cd.2]=[cd.1]-\frac{[bc.1]}{[b^2.1]}[bd.1] & [de.2]=[de.1]-\frac{[bd.1]}{[b^2.1]}[be.1] \\
[ce.2]=[ce.1]-\frac{[bc.1]}{[b^2.1]}[be.1] & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

$$
(3)\quad
\begin{array}{ll}
[d^2.3]=[d^2.2]-\frac{[cd.2]}{[c^2.2]}[cd.2] & [e^2.3]=[e^2.2]-\frac{[ce.2]}{[c^2.2]}[ce.2] \\
[de.3]=[de.2]-\frac{[cd.2]}{[c^2.2]}[ce.2] & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Dans la pratique on commencera par écrire un nombre de systèmes des équations (IV), égal au nombre des inconnues et composés successivement le premier de une équation (1), le second de deux équations (2), le troisième de trois équations (3), etc. On en calculera les coefficients au moyen des relations (V), et ensuite en commençant par la dernière des équations (IV), qui ne renferme qu'un seul multiplicateur inconnu, on déterminera d'abord celui-là et de proche en proche successivement tous les autres. On aura un contrôle dans ce calcul, qui permettra de s'assurer qu'on n'a pas commis d'erreur; en effet, après la détermination de chacun des systèmes des équations (IV), on peut vérifier les valeurs trouvées pour les multiplicateurs, en recherchant si par leur moyen on parvient dans le système (III) à éliminer toutes les inconnues sauf une.

39. On peut observer d'ailleurs qu'une extrême précision n'est pas absolument nécessaire dans la détermination des multiplicateurs, même dans le cas où l'on voudrait obtenir avec une très-grande exactitude la valeur des inconnues des équations (III). En effet, une petite erreur sur la valeur de ces multiplicateurs aura pour résultat de ne pas réaliser l'élimination absolue de toutes les inconnues sauf une, en sorte que toutes les inconnues pourront encore figurer dans chaque équation finale, mais l'une d'entre elles aura dans cette équation pour coefficient un nombre très-voisin de l'unité, et toutes les autres un coefficient très-voisin de zéro. Alors en négligeant les termes très-petits, on obtiendra pour chaque inconnue une première valeur approchée.

Lorsqu'on aura ainsi une première détermination de toutes les inconnues, on substituera dans chaque équation aux inconnues les valeurs trouvées, augmentées d'une correction indéterminée; par exemple à $x$, on substituera $A+x'$, en désignant par A la valeur approchée; à $y$, $B+y'$ etc. De cette manière on formera un nouveau système auquel on pourra appliquer les mêmes multiplicateurs pour trouver la valeur des corrections $x'$, $y'$ etc. et l'on aura ainsi des valeurs très-exactes des inconnues.

Il est vrai que les multiplicateurs doivent aussi servir à évaluer le poids ou la précision des résultats définitifs, mais pour ce but spécial une extrême rigueur dans la valeur absolue n'est pas indispensable et une valeur approchée est très-suffisante. Au reste, la forme même des équations (IV) est très-propre à donner à la détermination, des chances d'exactitude, parce que le coefficient de l'inconnue à déterminer dans chacune d'elles, est habituellement supérieur et même sensiblement à tous les autres.

40. Ayant ainsi déterminé les multiplicateurs propres à opérer l'élimination, on obtiendra par leur moyen les valeurs des inconnues sous la forme :

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} x&=A \\ y&=B \\ z&=C \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

en faisant :

$$(VI')\quad \begin{aligned} -A &= [\alpha\alpha][ak] + [\alpha\beta][bk] + [\alpha\gamma][ck] + \ldots \\ -B &= [\alpha\beta][ak] + [\beta\beta][bk] + [\beta\gamma][ck] + \ldots \\ -C &= [\alpha\gamma][ak] + [\beta\gamma][bk] + [\gamma\gamma][ck] + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

---

# CHAPITRE VII.

## Calcul de la précision du résultat dans le cas de plusieurs inconnues.

**41.** Nous commencerons par considérer sous un autre point de vue les valeurs obtenues pour les inconnues par la méthode du chapitre précédent.

Si nous formons au moyen des équations (I) les produits suivants :

$$\begin{aligned} a\Delta + a'\Delta' + a''\Delta'' \ldots &= \xi \\ b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' \ldots &= \eta \\ c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' \ldots &= \chi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (44)$$

Il est facile de voir que les équations (III), qui servent à déterminer les inconnues, ne sont autre chose que :

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0 \qquad \chi = 0 \qquad \text{etc.} \qquad (45)$$

En outre, en conservant les notations du chapitre précédent, posons :

$$\begin{aligned} \alpha &= a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + d[\alpha\delta] + \ldots \\ \alpha' &= a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + d'[\alpha\delta] + \ldots \\ \alpha'' &= a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + d''[\alpha\delta] + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (46)$$

et multiplions chacune des équations (I), membre à membre, respectivement par chacune des équations (46). En ajoutant les pro-

duits ainsi obtenus, il est facile de voir que dans le second membre de l'équation résultante les coefficients des différentes inconnues seront :

pour $x$ $[a^2][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] + [ad][\alpha\delta] + \ldots$

pour $y$ $[ab][\alpha\alpha] + [b^2][\alpha\beta] + [bc][\alpha\gamma] + [bd][\alpha\delta] + \ldots$

pour $z$ $[ac][\alpha\alpha] + [bc][\alpha\beta] + [c^2][\alpha\gamma] + [cd][\alpha\delta] + \ldots$

.... . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Or d'après les équations (41) la première suite est égale à l'unité, et toutes les autres à zéro. — D'ailleurs les termes des seconds membres indépendants des inconnues seront :

$$[\alpha\alpha][ak] + [\alpha\beta][bk] + [\alpha\gamma][ck] + \ldots$$

c'est-à-dire : —A, d'après les équations (VI'). Donc on aura :

$$\text{(VII)} \qquad \alpha\Delta + \alpha'\Delta' + \alpha''\Delta'' + \ldots = x - A$$

42. Cette équation identique à la première des équations (VI) montre comment la valeur de $x$ obtenue par la méthode des moindres carrés, dépend des erreurs des observations. Elle montre aussi que cette valeur, trouvée par l'intermédiaire des équations (III) aurait pu être déduite immédiatement des équations (I). On voit encore que les quantités $\alpha\, \alpha'\, \alpha'' \ldots$ définies par les équations (46) sont des multiplicateurs qui jouent à l'égard des équations (I) le même rôle que $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]\ldots$ à l'égard des équations (III). On en conclut donc qu'ils vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha a + \alpha'a' + \alpha''a'' + \ldots &= 1 \\ \alpha b + \alpha'b' + \alpha''b'' + \ldots &= 0 \qquad (47) \\ \alpha c + \alpha'c' + \alpha''c'' + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si nous multiplions ces dernières équations respectivement par $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et si nous ajoutons les produits nous aurons :

$$\begin{aligned} & \alpha\,\{a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \ldots\} \\ + & \alpha'\{a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + \ldots\} \\ + & \alpha''\{a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + \ldots\} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots = (\alpha\alpha) \end{aligned}$$

Ce qui d'après les équations (46) se réduit à :

(VIII) $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots\ldots = [\alpha\alpha]$

ce qui justifie la notation que nous avons admise pour ce multiplicateur au n° 37.

43. Si nous désignons par $\beta, \beta', \beta''\ldots$ des multiplicateurs qui jouent à l'égard de $y$ le même rôle que $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$ à l'égard de $x$, en sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned} \beta &= a[\alpha\beta] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \ldots\ldots \\ \beta' &= a'[\alpha\beta] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \ldots\ldots \\ \beta'' &= a''[\alpha\beta] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (48)$$

Nous trouverons comme plus haut :

(VII) $\beta\Delta + \beta'\Delta' + \beta''\Delta'' + \ldots\ldots = y - B$

De même en posant :

$$\begin{aligned} \gamma &= a[\alpha\gamma] + b[\beta\gamma] + c[\gamma\gamma] + \ldots\ldots \\ \gamma' &= a'[\alpha\gamma] + b'[\beta\gamma] + c'[\gamma\gamma] + \ldots\ldots \\ \gamma'' &= a''[\alpha\gamma] + b''[\beta\gamma] + c''[\gamma\gamma] + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (49)$$

on aura :

(VII) $\gamma\Delta + \gamma'\Delta' + \gamma''\Delta'' + \ldots = z - C$

et ainsi de même pour les autres inconnues.

44. On aurait d'ailleurs comme au n° (41) :

$$\begin{aligned} \beta a + \beta' a' + \beta'' a'' + \ldots\ldots &= 0 \\ \beta b + \beta' b' + \beta'' b'' + \ldots\ldots &= 1 \\ \beta c + \beta' c' + \beta'' c'' + \ldots\ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (50)$$

$$\begin{aligned} \gamma a + \gamma' a' + \gamma'' a'' + \ldots\ldots &= 0 \\ \gamma b + \gamma' b' + \gamma'' b'' + \ldots\ldots &= 0 \\ \gamma c + \gamma' c' + \gamma'' c'' + \ldots\ldots &= 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (51)$$

etc., etc.

En multipliant les équations (50) par $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$, $[\beta\gamma]\ldots$ respectivement et en ajoutant les produits, on a :

$$\begin{aligned}&\beta\,\{a\,[\alpha\beta]+b\,[\beta\beta]+c\,[\beta\gamma]+\ldots\}\\+\;&\beta'\,\{a'[\alpha\beta]+b'[\beta\beta]+c'[\beta\gamma]+\ldots\}\\+\;&\beta''\{a''[\alpha\beta]+b''[\beta\beta]+c''[\beta\gamma]+\ldots\}\\+\;&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = [\beta\beta]\end{aligned}$$

ou bien en vertu des équations (48) :

$$\text{(VIII)}\qquad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2+\ldots\ldots = [\beta\beta]$$

on trouverait de même :

$$\begin{aligned}\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2+\ldots\ldots &= [\gamma\gamma]\\ \delta^2+\delta'^2+\delta''^2+\ldots\ldots &= [\delta\delta]\end{aligned}$$

45. Si l'on multiplie les équations (46) respectivement par $\beta$, $\beta'$ $\beta''\ldots$ et si l'on ajoute les produits on trouve :

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots\ldots = [\alpha\alpha]\,&\{a\beta+a'\beta'+a''\beta''+\ldots\}\\ +\,[\alpha\beta]\,&\{b\beta+b'\beta'+b''\beta''+\ldots\}\\ +\,[\alpha\gamma]\,&\{c\beta+c'\beta'+c''\beta''+\ldots\}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ou bien en vertu des équations (50) :

$$\text{(IX)}\qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\ldots = [\alpha\beta]$$

Par des calculs analogues on trouverait la valeur de tous les autres multiplicateurs et l'on reconnaîtrait qu'ils sont composés à l'égard de $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$, $\beta, \beta', \beta''\ldots$, $\gamma, \gamma', \gamma''\ldots$ conformément à la notation admise aux nos 14 et 36.

46. Il résulte de cette analyse que, en désignant par $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$, les erreurs des différentes observations, l'on a :

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned}x &= A+\alpha\Delta+\alpha'\Delta'+\alpha''\Delta''+\ldots\ldots\\ y &= B+\beta\Delta+\beta'\Delta'+\beta''\Delta''+\ldots\ldots\\ z &= C+\gamma\Delta+\gamma'\Delta'+\gamma''\Delta''+\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Et d'après le n° 32 les valeurs les plus plausibles des inconnues sont :

$$
(X)\quad
\begin{array}{llll}
x = A & \text{poids } \dfrac{1}{[\alpha\alpha]} & \text{erreur probable} & \rho\varepsilon_2\sqrt{2}\sqrt{[\alpha\alpha]} \\
y = B & \quad » \quad \dfrac{1}{[\beta\beta]} & \quad » & \rho\varepsilon_2\sqrt{2}\sqrt{[\beta\beta]} \\
z = C & \quad » \quad \dfrac{1}{[\gamma\gamma]} & \quad » & \rho\varepsilon_2\sqrt{2}\sqrt{[\gamma\gamma]} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

En attribuant à chacune des observations primitives l'unité de poids, et en nommant $\varepsilon_2$ l'erreur moyenne à craindre dans chacune d'elles, ou la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs.

47. Il nous reste maintenant à déterminer $\varepsilon_2$. On pourrait dans ce but substituer dans les équations (I) les valeurs trouvées pour les inconnues et après avoir ainsi mis en évidence la valeur des erreurs définitives, calculer directement la valeur $(\varepsilon_2)^2$ de la moyenne de leurs carrés. Mais les quantités auxiliaires qui nous ont servi dans les calculs du chapitre VI, peuvent considérablement abréger ce travail.

Considérons en effet les équations (I) n° 36 ; élevons chacune d'elles au carré et ajoutons les résultats en posant :

$$\Omega = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots\ldots$$

nous aurons :

$$
\begin{aligned}
\Omega = {} & [a^2]x^2 + [b^2]y^2 + [c^2]z^2 + \ldots\ldots + [k^2] \\
& + 2\{[ab]xy + [ac]xz + [bc]yz + \ldots\ldots\} \\
& + 2\{[ak]\,x + [bk]\,y + [ck]\,z + \ldots\ldots\}
\end{aligned}
$$

Ou bien en écrivant les termes dans un ordre différent :

$$
\begin{aligned}
\Omega = {} & x\{[a^2]x + [ab]y + [ac]z + \ldots\ldots + [ak]\} \\
& + y\{[ab]x + [b^2]y + [bc]z + \ldots\ldots + [bk]\} \\
& + z\{[ac]x + [bc]y + [c^2]z + \ldots\ldots + [ck]\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [k^2] + x[ak] + y[bk] + z[ck] + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Mais en vertu des équations (III), les premiers termes s'annulent lorsqu'on remplace $x, y, z\ldots$ par leurs valeurs et le second membre se réduit à la dernière ligne, en sorte que :

$$\text{(XI)} \qquad \Omega = [k^2] + x\,[ak] + y\,[bk] + z\,[ck] + \ldots\ldots$$

Connaissant par là, la valeur de la somme des carrés des erreurs, on trouve $\varepsilon_2$ par l'équation :

$$\text{(XII)} \qquad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{m-n}}$$

$m$ étant le nombre des équations et $n$ celui des inconnues (n° 28).

---

## CHAPITRE VIII.

### Application à un exemple particulier.

48. Nous prendrons comme exemple le système traité par Gauss (*Commentationes societatis Regiæ scientiarum Gottingensis recentiores*, vol. I, 1811). Les équations sont au nombre de 12, mais se réduisent à 11 à cause de l'incertitude des observations d'où la 10^me^ est déduite. Les onze équations à résoudre sont :

$$\begin{array}{l}
+0{,}79363x + 143{,}66y + 0{,}39493z + 0{,}95920w - 0{,}18856u + 0{,}17387t - 183'',93 = 0 \\
-0{,}02658x + 46{,}71y + 0{,}02658z - 0{,}20858w + 0{,}15946u + 1{,}25782t - 6'',81 = 0 \\
+0{,}58880x + 358{,}12y + 0{,}26208z - 0{,}85234w + 0{,}14912u + 0{,}17775t - 0'',06 = 0 \\
+0{,}01318x + 28{,}39y - 0{,}01318z - 0{,}07861w + 0{,}91704u + 0{,}54365t - 3'',09 = 0 \\
+1{,}73436x + 1846{,}17y - 0{,}54603z - 2{,}05662w - 0{,}18833u - 0{,}17445t - 0'',02 = 0 \\
-0{,}12606x - 227{,}42y + 0{,}12603z - 0{,}38939w + 0{,}17176u - 1{,}35441t - 8'',98 = 0 \\
+0{,}99584x + 1579{,}03y + 0{,}06456z + 1{,}99545w - 0{,}06040u - 0{,}33750t - 2'',31 = 0 \\
-0{,}08089x - 67{,}22y + 0{,}08089z - 0{,}09970w - 0{,}46359u + 1{,}22803t + 2'',47 = 0 \\
+0{,}65311x + 1329{,}09y + 0{,}38994z - 0{,}08439w - 0{,}04305u + 0{,}34268t + 0'',01 = 0 \\
+0{,}69957x + 1719{,}32y + 0{,}12913z - 1{,}38787w + 0{,}17130u - 0{,}08360t - 317'',73 = 0 \\
-0{,}01315x - 43{,}84y + 0;01315z + 0{,}02929w + 1{,}02138u - 0.27187t + 117'',97 = 0
\end{array}$$

Les six inconnues que nous avons représentées par $x, y, z, w$, $u$ et $t$ sont les corrections à apporter aux éléments elliptiques de Pallas, déduits des observations de 1804 à 1808 pour tenir compte des observations de 1803 à 1809 dont pouvait disposer Gauss à l'époque où il a présenté son mémoire à la société de Gottingue (25 novembre 1810).

Cet exemple a été traité par Gauss dans le mémoire cité, avec tous les développements propres à faire connaître l'algorithme ingénieux par lequel il applique la méthode des moindres carrés, et que nous avons exposé dans les n^os^ 37 et suivants. Il prévient en outre qu'il a fait les calculs avec soin et que les résultats sont exacts (*calculo accurate absoluto*, etc.). Cependant il est facile de voir que, sans parler d'une faute de calcul évidente dans la détermination du coefficient $[bb.1]$ et des suivants, il a cru pouvoir négliger comme insensibles dans les différents produits quelques-unes des dernières décimales. Afin de juger de l'influence de ces négligences sur la valeur des inconnues, j'ai refait le calcul entier, en conservant dans chaque produit un nombre de décimales supérieur à celui qui doit être conservé et en supprimant, seulement au résultat final, celles qui sont inutiles. J'ai obtenu ainsi par les équations (II) les valeurs suivantes en regard desquelles je place celles que Gauss indique :

| | | Valeurs trouvées : | | suivant Gauss : |
|---|---|---|---|---|
| $[a^2]$ | = | 5,915674 | | 5,91569 |
| $[b^2]$ | = | 10834257,176900 | | 10834225, |
| $[c^2]$ | = | 0,719188 | | 0,71917 |
| $[d^2]$ | = | 12,003467 | | 12,0034 |
| $[e^2]$ | = | 2,282129 | | 2,28215 |
| $[f^2]$ | = | 5,624647 | | 5,62456 |
| $[k^2]$ | = | 148847,524400 | | 148848, |
| $[ab]$ | = + | 7203,900356 | + | 7203,91 |
| $[ac]$ | = − | 0,093458 | − | 9,09344 |
| $[ad]$ | = − | 2,285133 | − | 2,28516 |
| $[ae]$ | = − | 0,346641 | − | 0,34664 |
| $[af]$ | = − | 0,181975 | − | 0,18194 |
| $[ak]$ | = − | 371,089418 | − | 371,09 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[bc] = -$ | 49,064264 | $-$ | 49,06 |
| $[bd] = -$ | 3229,792290 | $-$ | 3229,77 |
| $[be] = -$ | 198,639388 | $-$ | 198,64 |
| $[bf] = -$ | 143,058056 | $-$ | 143,05 |
| $[bk] = -$ | 580097,033200 | $-$ | 580104, |
| $[cd] = +$ | 1,133841 | $+$ | 1,13382 |
| $[ce] = +$ | 0,058616 | $+$ | 0,06400 |
| $[cf] = +$ | 0,262837 | $+$ | 0,26341 |
| $[ck] = -$ | 113,339187 | $-$ | 113,45 |
| $[de] = -$ | 0,371373 | $-$ | 0,37137 |
| $[df] = -$ | 0,120404 | $-$ | 0,11762 |
| $[dk] = +$ | 268,393358 | $+$ | 268,53 |
| $[ef] = -$ | 0,362610 | $-$ | 0,36136 |
| $[ek] = +$ | 94,273755 | $+$ | 94,26 |
| $[fk] = -$ | 31,764106 | $-$ | 31,81 |

J'ai obtenu une vérification de ces calculs par la relation (II), en déterminant la somme des carrés des sommes des coefficients pour lesquelles j'avais les valeurs suivantes :

| | |
|---|---|
| + | 38,13693 |
| | 41,10870 |
| | 358,38541 |
| | 26,68208 |
| | 1844,91893 |
| — | 237,97204 |
| + | 1579,37795 |
| — | 64,08526 |
| + | 1330,35829 |
| + | 1401,11853 |
| + | 74,90880 |

J'obtiens par le double calcul :

$$[S^2] = 9829792,208927$$

Les chiffres de Gauss donneraient :

9829746,81237

Les équations à résoudre sont donc : (III)

$$+5{,}915674.x+7203{,}900356.y-0{,}093458.z-2{,}285133.w-0{,}346641.u-0{,}181975.t-371{,}089418=0$$
$$7203{,}9004.x+10834257{,}18.y-49{,}064264.z-3229{,}79229.w-198{,}63939.u-143{,}058056.t-580097{,}0332=0$$
$$-0{,}093458.x-49{,}064264.y+0{,}719188.z+1{,}133841.w+0{,}058616.u+0{,}262837.t-113{,}339187=0$$
$$-2{,}285133.x-3229{,}792290.y+1{,}133841.z+12{,}003467.w-0{,}371373.u-0{,}120404.t+268{,}393358=0$$
$$-0{,}346641.x-198{,}639388.y+0{,}058616.z-0{,}371373.w+2{,}282129.u-0{,}362610.t+94{,}273755=0$$
$$-0{,}181975.x-143{,}058056.y+0{,}262837.z-0{,}120404.w-0{,}362610.u+5{,}624647.t-31{,}764106=0$$

En écrivant au complet les équations du système (IV) destinées à faire connaître la valeur des multiplicateurs propres à produire l'élimination des différentes inconnues, nous formons le tableau suivant :

(IV)

(1)
$$[a^2][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+[ad]+[\alpha\delta]+[ae][\alpha\zeta]+[af][\alpha\theta]=1$$

(2)
$$[a^2][\alpha\beta]+[ab][\beta\beta]+[ac][\beta\gamma]+[ad]+[\beta\delta]+[ae][\beta\zeta]+[af][\beta\theta]=0$$
$$[b^2.1][\beta\beta]+[bc.1][\beta\gamma]+[bd.1][\beta\delta]+[be.1][\beta\zeta]+[bf.1][\beta\theta]=1$$

(3)
$$[a^2][\alpha\gamma]+[ab][\beta\gamma]+[ac][\gamma\gamma]+[ad][\gamma\delta]+[ae][\gamma\zeta]+[af][\gamma\theta]=0$$
$$[b^2.1][\beta\gamma]+[bc.1][\gamma\gamma]+[bd.1][\gamma\delta]+[be.1][\gamma\zeta]+[bf.1][\gamma\theta]=0$$
$$[c^2.2][\gamma\gamma]+[cd.2][\gamma\delta]+[ce.2][\gamma\zeta]+[cf.2][\gamma\theta]=1$$

(4)
$$[a^2][\alpha\delta]+[ab][\beta\delta]+[ac][\gamma\delta]+[ad][\delta\delta]+[ae][\delta\zeta]+[af][\delta\theta]=0$$
$$[b^2.1][\beta\delta]+[bc.1][\gamma\delta]+[bd.1][\delta\delta]+[be.1][\delta\zeta]+[bf.1][\delta\theta]=0$$
$$[c^2.2][\gamma\delta]+[cd.2][\delta\delta]+[ce.2][\delta\zeta]+[cf.2][\delta\theta]=0$$
$$[d^2.3][\delta\delta]+[de.3][\delta\zeta]+[df.3][\delta\theta]=1$$

(5)
$$[a^2][\alpha\zeta]+[ab][\beta\zeta]+[ac][\gamma\zeta]+[ad][\delta\zeta]+[ae][\zeta\zeta]+[af][\zeta\theta]=0$$
$$[b^2.1][\beta\zeta]+[bc.1][\gamma\zeta]+[bd.1][\delta\zeta]+[be.1][\zeta\zeta]+[bf.1][\zeta\theta]=0$$
$$[c^2.2][\gamma\zeta]+[cd.2][\delta\zeta]+[ce.2][\zeta\zeta]+[cf.2][\zeta\theta]=0$$
$$[d^2.3][\delta\zeta]+[de.3][\zeta\zeta]+[df.3][\zeta\theta]=0$$
$$[e^2.4][\zeta\zeta]+[ef.4][\zeta\theta]=1$$

(6)
$$[a^2][\alpha\theta]+[ab][\beta\theta]+[ac][\gamma\theta]+[ad][\delta\theta]+[ae][\zeta\theta]+[af][\theta\theta]=0$$
$$[b^2.1][\beta\theta]+[bc.1][\gamma\theta]+[bd.1][\delta\theta]+[be.1][\zeta\theta]+[bf.1][\theta\theta]=0$$
$$[c^2.2][\gamma\theta]+[cd.2][\delta\theta]+[ce.2][\zeta\theta]+[cf.2][\theta\theta]=0$$
$$[d^2.3][\delta\theta]+[de.3][\zeta\theta]+[df.3][\theta\theta]=0$$
$$[e^2.4][\zeta\theta]+[ef.4][\theta\theta]=0$$
$$[f^2.5][\theta\theta]=1$$

Il faut maintenant calculer, au moyen des équations du système (V) n° 37, les valeurs des coefficients qui figurent dans ces

différentes relations. J'ai trouvé les valeurs suivantes en regard desquelles je place celles de Gauss, en signalant par un astérisque ceux de ces résultats dans lesquels se sont évidemment glissées des erreurs de calcul.

| | Valeurs trouvées : | Mémoire de Gauss : |
|---|---|---|
| $[b^2 . 1]=$ | $+$ 2061599,9380 | $+$ 2458225.* |
| $[bc . 1]=$ | $+$ 64,746118 | $+$ 62,13* |
| $[bd . 1]=$ | $-$ 447,038112 | $-$ 510,58* |
| $[be . 1]=$ | $+$ 223,487963 | $+$ 213,84* |
| $[bf . 1]=$ | $+$ 78,544284 | $+$ 73,45* |
| $[c^2 . 1]=$ | $+$ 0,717711 | $+$ 0,71769 |
| $[cd . 1]=$ | $+$ 1,097740 | $+$ 1,09773 |
| $[ce . 1]=$ | $+$ 0,053140 | $-$ 0,05852* |
| $[cf . 1]=$ | $+$ 0,259962 | $+$ 0,26054 |
| $[d^2 . 1]=$ | $+$ 11,120756 | $+$ 11,12064 |
| $[de . 1]=$ | $-$ 0,505275 | $-$ 0,50528 |
| $[df . 1]=$ | $-$ 0,190698 | $-$ 0,18790 |
| $[e^2 . 1]=$ | $+$ 2,261817 | $+$ 2,26185 |
| $[ef . 1]=$ | $-$ 0,373273 | $-$ 0,37202 |
| $[f^2 . 1]=$ | $+$ 5,619049 | $+$ 5,61905 |

Avec ces valeurs on obtient par les relations (V) (2):

| | Valeurs trouvées : | Mémoire de Gauss : |
|---|---|---|
| $[c^2 . 2]=$ | $+$ 0,715678 | $+$ 0,71612 |
| $[cd . 2]=$ | $+$ 1,111780 | $+$ 1,11063 |
| $[ce . 2]=$ | $+$ 0,046121 | $-$ 0,06392 |
| $[cf . 2]=$ | $+$ 0,257495 | $+$ 0,25868 |
| $[d^2 . 2]=$ | $+$ 11,023820 | $+$ 11,01466 |
| $[de . 2]=$ | $-$ 0,456814 | $-$ 0,46088 |
| $[df . 2]=$ | $-$ 0,173666 | $-$ 0,17265 |
| $[e^2 . 2]=$ | $+$ 2,237590 | $+$ 2,24325 |
| $[ef . 2]=$ | $-$ 0,381788 | $-$ 0,37841 |
| $[f^2 . 2]=$ | $+$ 5,616057 | $+$ 5,61686 |

Avec ces nouvelles valeurs on calcule par les formules (V) (3) n° 37 :

| | | |
|---|---|---|
| $[d^2.3] =$ | $+\ 9,296710$ | $+\ 9,29213$ |
| $[de.3] =$ | $-\ 0,328461$ | $-\ 0,36175$ |
| $[df.3] =$ | $-\ 0,573675$ | $-\ 0,57384$ |
| $[e^2.3] =$ | $+\ 2,234618$ | $+\ 2,23754$ |
| $[ef.3] =$ | $-\ 0,398382$ | $-\ 0,35532$ |
| $[f^2.3] =$ | $+\ 5,523412$ | $+\ 5,52342$ |

On obtient ensuite par (V) (4) :

| | | |
|---|---|---|
| $[e^2.4] =$ | $+\ 2,204578$ | $+\ 2,22346$ |
| $[ef.4] =$ | $-\ 0,430992$ | $-\ 0,37766$ |
| $[f^2.4] =$ | $+\ 5,488012$ | $+\ 5,48798$ |

Et enfin :

| | | |
|---|---|---|
| $[f^2.5] =$ | $+\ 5,403754$ | $+\ 5,42383$ |

Au moyen de ces valeurs on obtient par les équations du système (IV) page 50, en remontant de proche en proche de la dernière à la première, les valeurs suivantes pour les multiplicateurs propres à effectuer l'élimination :

$[\theta\theta] = +\ 0,1850566$
$[\zeta\theta] = +\ 0,0361787$
$[\delta\theta] = +\ 0,0134757$
$[\gamma\theta] = -\ 0,0898478$
$[\beta\theta] = -\ 0,00000523298$
$[\alpha\theta] = +\ 0,0179724$

$[\zeta\zeta] = +\ 0,4606751$
$[\delta\zeta] = +\ 0,0284195$
$[\gamma\zeta] = -\ 0,0868585$
$[\beta\zeta] = -\ 0,0000424318$
$[\alpha\zeta] = +\ 0,0893848$

$[\delta\delta] = +\ 0,1100110$
$[\gamma\delta] = -\ 0,1775735$
$[\beta\delta] = +\ 0,0000258287$
$[\alpha\delta] = +\ 0,0103167$

$[\gamma\gamma] = +\ 1,7110353$
$[\beta\gamma] = -\ 0,000079319$
$[\alpha\gamma] = +\ 0,0471761$

$[\beta\beta] = +\ 0,00000049795$
$[\alpha\beta] = -\ 0,00060030$

$[\alpha\alpha] = +\ 0,9105951$

En traitant par les multiplicateurs trouvés plus haut, les six équations précédentes dans lesquelles on remplacera les termes connus par ces erreurs de la première approximation, on trouvera pour corrections :

| | | | |
|---|---|---|---|
| à la valeur de | $x$ | — | 0,080697 |
| » | $y$ | — | 0,000027043 |
| » | $z$ | + | 0,779726 |
| » | $w$ | — | 0,113522 |
| » | $u$ | — | 0,564727 |
| » | $t$ | — | 0,064593 |

D'où résultent pour ces inconnues les valeurs suivantes :

$$x = -15,681697$$
$$y = +0,054012957$$
$$z = +219,194726$$
$$w = -33,205522$$
$$u = -51,761727$$
$$t = -7,763593$$

Si l'on compare ces valeurs à celles que le calcul exact a produites, on voit qu'il en résulte pour les inconnues, les différences suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| pour | $x$ | — | 0″,093173 |
| » | $y$ | + | 0″,000021084 |
| » | $z$ | + | 0″,787136 |
| » | $w$ | — | 0″,114078 |
| » | $u$ | — | 0″,565863 |
| » | $t$ | — | 0″,064842 |

Ces différences dépassent de beaucoup les quantités qu'on peut négliger dans un calcul de ce genre ; et cependant elles naissent de petites omissions ou de petites inexactitudes bien moindres dans ce cas spécial que celles que l'on se permet habituellement dans l'application de la méthode des moindres carrés ; car c'est vraisemblablement à cette partie du calcul que s'applique la remarque de Gauss sur l'exactitude qu'il s'est imposée.

Il me semble de quelque importance d'insister sur ce point qui justifie l'observation que nous avons présentée au n° 36. La pré-

cision rend sans doute le travail plus onéreux et plus long, mais c'est la condition indispensable pour être conduit à des résultats auxquels leur exactitude donne quelque valeur.

Pour achever le calcul nous devons déterminer la somme des carrés des erreurs. Par l'équation (XI) nous trouvons au moyen des valeurs précédentes :

$$\Omega = 85094{,}189496$$

En faisant la substitution des valeurs des inconnues dans les 11 équations primitives, on trouve pour erreurs restantes les nombres suivants :

$$\begin{array}{r} -\ 125{,}716 \\ -\ 9{,}014 \\ +\ 86{,}540 \\ -\ 53{,}174 \\ +\ 32{,}406 \\ +\ 22{,}758 \\ +\ 21{,}180 \\ +\ 35{,}347 \\ +\ 149{,}113 \\ -\ 169{,}803 \\ +\ 68{,}513 \end{array}$$

Ces erreurs sont beaucoup plus considérables que celles que l'on rencontre habituellement dans les applications. Cette circonstance tient à la nature de la recherche. En effet dans le mémoire d'où nous avons tiré les équations que nous venons de résoudre, Gauss a pour but de résoudre le problème purement analytique de rechercher quels sont les éléments *elliptiques* qui satisfont le mieux aux oppositions observées de *Pallas* depuis 1803 jusqu'en 1809. Il fait donc abstraction des perturbations considérables causées principalement par l'action de Jupiter, et les erreurs que le calcul signale naissent de cette cause et non des observations.

On peut obtenir une nouvelle vérification de tout le calcul en faisant la somme des carrés des erreurs que nous venons de calculer. Cette somme est égale à

$$85093{,}06$$

La différence tout à fait insignifiante entre les deux calculs provient des parties négligées, et surpasse de beaucoup en exactitude ce qui est utile comme contrôle.

Il faudrait maintenant calculer l'erreur probable de chaque inconnue. La circonstance que nous avons mentionnée rend cette recherche pour le problème spécial tout à fait inutile ; néanmoins nous ferons ce calcul comme application des équations (X).

Nous avons d'abord par (XII) en faisant $m = 11$, $n = 6$ :

$$\varepsilon_2 = 130'',456268$$

Nous aurons en outre pour les équations (X) :

$$\rho\varepsilon_2\sqrt{2} = 87'',9914$$

Et en ayant égard aux poids des différentes déterminations dont la valeur est donnée page 65, nous trouvons pour l'erreur probable :

| | | |
|---|---|---|
| de $x$ | = | 83'',966 |
| » $y$ | = | 0'',062092 |
| » $z$ | = | 115'',098 |
| » $w$ | = | 29'',195 |
| » $u$ | = | 59'',722 |
| » $t$ | = | 30'',067 |

Nous ne donnons ces valeurs que comme exemple de calcul, car, comme nous l'avons dit, elles ne peuvent pas avoir, dans ce cas particulier, la signification habituelle, puisque la recherche est altérée par un mélange d'empirisme.

---

# NOTES

## Note A

Le premier principe énoncé dans le n° 4, est la définition même de la probabilité, et le second en est une conséquence immédiate.

Pour démontrer le troisième il suffit d'observer que F, étant le nombre total des événements que peut amener la première cause, et F′ celui des événements possibles créés par la seconde, le produit $F \times F'$ exprimera le nombre total des événements possibles par l'action simultanée des deux causes. D'un autre côté les événements favorables seront tous ceux dans lesquels l'un des $f$ événements favorables que la première cause aura amené, se combinera avec l'un des $f'$ événements favorables, relatifs à la seconde; le nombre de ces événements favorables sera donc $f \times f'$, et la probabilité sera pour ce cas :

$$\frac{ff'}{FF'} = \frac{f}{F} \times \frac{f'}{F'}$$

On voit d'ailleurs facilement que ce principe peut se généraliser pour un nombre quelconque de causes simultanées.

Pour établir le quatrième principe observons que, si avant l'arrivée de l'événement nous désignons le nombre total des cas possibles par $m+n+m'+n'+m''+n''$ savoir $m\, m'\, m''$ respectivement, le nombre des cas favorables à la cause C, à la cause C′ et à toutes les autres causes, $n\, n'\, n''$ le nombre des cas respectivement contraires à l'événement E nous aurons :

pour la probabilité de l'action de la cause C :

$$\frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$$

pour la probabilité de l'action de C' :

$$\frac{m'+n'}{m+n+m'+n'+m''+n''}$$

pour la probabilité de l'action d'une autre cause :

$$\frac{m''+n''}{m+n+m'+n'+m''+n''}$$

Mais par hypothèse les causes C et C' sont également probables, donc :

$$m+n = m'+n'$$

D'un autre côté l'événement E ayant été produit, les cas $n$, $n'$ et $n''$ se trouvent exclus et les probabilités qu'il a été créé par chacune des causes deviennent :

pour la cause C :

$$\frac{m}{m+m'+m''}$$

pour la cause C' :

$$\frac{m'}{m+m'+m''}$$

pour une cause différente :

$$\frac{m''}{m+m'+m''}$$

Donc la probabilité qu'il est dû à la cause C est à la probabilité qu'il est dû à la cause C' comme $m$ est à $m'$.

Mais on a :

$$\frac{m}{m+n} = \frac{f}{F} \qquad \frac{m'}{m'+n'} = \frac{f'}{F'}$$

Et comme $m+n=m'+n'$ on a :

$$m : m' = \frac{f}{F} : \frac{f'}{F'}$$

d'où résulte le quatrième principe.

---

# Note B

Nous développons dans cette note quelques intégrales définies que nous avons rencontrées dans le calcul.

1. Désignons comme on le fait habituellement par $\Gamma(\mu)$ l'intégrale définie suivante :

$$(a) \qquad \Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

et observons d'entrée que si $\mu=1$ l'intégrale indéfinie étant

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

l'intégrale entre les limites sera :

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

par conséquent :

$$(b) \qquad \Gamma(1) = 1.$$

Considérons l'intégrale $\int x^\mu e^{-x} dx$; on obtient par l'intégration par parties :

$$\int x^\mu e^{-x} dx = -x^\mu e^{-x} + \mu \int x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

et comme le terme intégré est nul aux deux limites, l'équation devient :

$$\int x^\mu e^{-x} dx = \mu \int x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

ou bien d'après la notation précédente :

$$(c) \qquad \Gamma(\mu+1) = \mu \Gamma(\mu)$$

de là en faisant successivement $\mu = 1, 2, 3 \ldots.$ et en observant que $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 1 . 2$$
$$\Gamma(4) = 1 . 2 . 3$$

et par conséquent pour $\mu$ nombre entier:

(d) $$\Gamma(\mu) = 1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$$

ou bien par la notation de VANDERMONDE:

$$\Gamma(\mu) = [\mu-1]^{\mu-1}$$

2. Remplaçons dans l'équation (a) $x$ par $t^2$; les limites pour $t$ seront aussi 0 et $\infty$ et l'équation deviendra :

$$\Gamma(\mu) = 2\int_0^\infty t^{2\mu-1} e^{-t^2} dt$$

Par conséquent en donnant successivement à $\mu$ les valeurs $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, et en simplifiant les résultats par l'équation (b):

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_0^\infty te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_0^\infty t^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} . 1$$

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$\int_0^\infty t^5 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} . 1 . 2$$

$$\int_0^\infty t^6 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . \frac{5}{2} . \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

et en général $n$ étant un nombre entier :

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$(e) \qquad \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2} . 1 . 2 . 3 \ldots . n$$

3. Toutes ces intégrales renferment encore une fonction inconnue $\Gamma(\frac{1}{2})$. Pour déterminer sa valeur remplaçons dans ($a$) $x$ par $(1+r)\,z$ et $\mu$ par $p+q$ ; $z$ étant la nouvelle variable elle aura les mêmes limites que $x$, savoir 0 et $\infty$ et l'équation devient :

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty (1+r)^{p+q} z^{p+q-1} e^{-(1+r)z} dz$$

ou bien :

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+r)^{p+q}} = \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-(1+r)z} dz$$

Multiplions chaque membre par $r^{p-1} dr$, et intégrons de chaque côté par rapport à cette nouvelle variable entre les limites 0 et $\infty$ nous obtiendrons en observant que $z$ et $r$ sont indépendants

$$(f) \qquad \Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{r^{p-1}\,dr}{(1+r)^{p+q}} = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty r^{p-1} e^{-rz} dr \right\} z^{p+q-1} e^{-z} dz$$

En faisant $rz = y$, $z$ étant considérée comme constante dans cette intégrale, nous aurons :

$$\int_0^\infty r^{p-1} e^{-rz} dr = \frac{1}{z^p} \int y^{p-1} e^{-y} dy = \frac{1}{z^p} \Gamma(p)$$

En substituant cette valeur dans l'équation ($f$) on a :

$$\Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{r^{p-1} dr}{(1+r)^{p+q}} = \Gamma(p) \int_0^\infty z^{q-1} e^{-z} dr = \Gamma(p) . \Gamma(q)$$

ou :

$$\frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int \frac{r^{p-1}dr}{(1+r)^{p+q}}$$

Faisons maintenant $p = q = \frac{1}{2}$ il vient :

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \int_0^\infty \frac{dr}{(1+r)\sqrt{r}} = 2\int_0^\infty \frac{d.\sqrt{r}}{1+r}$$

L'intégrale indéfinie a pour valeur ($arc\ tg = \sqrt{r}$) et par conséquent l'intégrale entre les limites devient $\frac{1}{2}\pi$ ; donc :

$$(g) \qquad \{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \pi \quad \text{ou} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

4. Pour obtenir la valeur de $\int e^{-t^2}dt$ entre des limites différentes de 0 et $\infty$ il faut déterminer l'intégrale indéfinie de la fonction, ce qui ne peut pas se faire en termes finis.

En développant l'exponentielle et en intégrant on trouve :

$$(h) \quad \int_0^t e^{-t^2}dt = t - \frac{1}{1}\frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{t^9}{9} - \ldots$$

Par l'intégration par parties on obtient :

$$(i) \quad \int_0^t e^{-t^2}dt = e^{-t^2}t\left\{1 + \frac{2t^2}{1.3} + \frac{(2t^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right\}$$

En effectuant dans un autre sens l'intégration par parties on obtient :

$$\int_t^\infty e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t^2}}{t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \frac{1.3.5}{2^3t^6} + \ldots\right\}$$

ou :

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-t^2}}{t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2t^4} - \frac{1.3.5}{2^3t^6} + \ldots\right\}$$

(Voyez LAPLACE, *Théorie analytique des Probabilités*, p. 113 et 114, et *Méc. céleste*, t. IV, p. 253 et 254).

L'emploi de ces formules n'est pas commode, et comme l'intégrale qu'elles déterminent se présente fréquemment, on en a dressé des tables. Les plus étendues sont celles que KRAMP a données dans son ouvrage intitulé *Analyse des Réfractions;* nous en avons extrait celle que nous donnons plus loin.

---

TABLE DES VALEURS DE LA FONCTION :

$$\Theta(t) = \int_0^t \frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}}$$

| t | Θ(t) | diff. | t | Θ(t) | diff. | t | Θ(t) | diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 1128 | 0,35 | 0,37938 | 995 | 0,70 | 0,67780 | 687 |
| 01 | 01128 | 1128 | 36 | 38933 | 988 | 71 | 68467 | 676 |
| 02 | 02256 | 1128 | 37 | 39921 | 980 | 72 | 69143 | 667 |
| 03 | 03384 | 1127 | 38 | 40901 | 973 | 73 | 69810 | 658 |
| 04 | 04511 | 1126 | 39 | 41874 | 965 | 74 | 70468 | 648 |
| 05 | 05637 | 1125 | 40 | 42839 | 958 | 75 | 71116 | 638 |
| 0,06 | 0,06762 | 1124 | 0,41 | 0,43797 | 950 | 0,76 | 0,71754 | 628 |
| 07 | 07886 | 1122 | 42 | 44747 | 942 | 77 | 72382 | 619 |
| 08 | 09008 | 1120 | 43 | 45689 | 934 | 78 | 73001 | 609 |
| 09 | 10128 | 1118 | 44 | 46623 | 925 | 79 | 73610 | 600 |
| 10 | 11246 | 1116 | 45 | 47548 | 918 | 80 | 74210 | 590 |
| 0,11 | 0,12362 | 1114 | 0,46 | 0,48466 | 909 | 0,81 | 0,74800 | 581 |
| 12 | 13476 | 1111 | 47 | 49375 | 900 | 82 | 75381 | 571 |
| 13 | 14587 | 1108 | 48 | 50275 | 892 | 83 | 75952 | 562 |
| 14 | 15695 | 1105 | 49 | 51167 | 883 | 84 | 76514 | 553 |
| 15 | 16800 | 1101 | 50 | 52050 | 874 | 85 | 77067 | 543 |
| 0,16 | 0,17901 | 1098 | 0,51 | 0,52924 | 866 | 0,86 | 0,77610 | 534 |
| 17 | 18999 | 1095 | 52 | 53790 | 856 | 87 | 78144 | 525 |
| 18 | 20094 | 1090 | 53 | 54646 | 848 | 88 | 78669 | 515 |
| 19 | 21184 | 1086 | 54 | 55494 | 838 | 89 | 79184 | 507 |
| 20 | 22270 | 1082 | 55 | 56332 | 830 | 90 | 79691 | 497 |
| 0,21 | 0,23352 | 1078 | 0,56 | 0,57162 | 820 | 0,91 | 0,80188 | 489 |
| 22 | 24430 | 1072 | 57 | 57982 | 810 | 92 | 80677 | 479 |
| 23 | 25502 | 1068 | 58 | 58792 | 802 | 93 | 81156 | 471 |
| 24 | 26570 | 1063 | 59 | 59594 | 792 | 94 | 81627 | 462 |
| 25 | 27633 | 1057 | 60 | 60386 | 782 | 95 | 82089 | 453 |
| 0,26 | 0,28690 | 1052 | 0,61 | 0,61168 | 773 | 0,96 | 0,82542 | 445 |
| 27 | 29742 | 1046 | 62 | 61941 | 764 | 97 | 82987 | 436 |
| 28 | 30788 | 1040 | 63 | 62705 | 754 | 98 | 83423 | 428 |
| 29 | 31828 | 1035 | 64 | 63459 | 744 | 99 | 83851 | 419 |
| 30 | 32863 | 1028 | 65 | 64203 | 735 | 1,00 | 84270 | 411 |
| 0,31 | 0,33891 | 1022 | 0,66 | 0,64938 | 725 | 1,01 | 0,84681 | 403 |
| 32 | 34913 | 1015 | 67 | 65663 | 715 | 02 | 85084 | 394 |
| 33 | 35928 | 1008 | 68 | 66378 | 706 | 03 | 85478 | 387 |
| 34 | 36936 | 1002 | 69 | 67084 | 696 | 04 | 85865 | 379 |
| 35 | 37938 | 995 | 70 | 67780 | 687 | 05 | 86244 | 370 |

| t | Θ(t) | diff. | t | Θ(t) | diff. | t | Θ(t) | diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,05 | 0,86244 | 370 | 1,50 | 0,96611 | 117 | 1,95 | 0,99418 | 25 |
| 06 | 86614 | 363 | 51 | 96728 | 113 | 96 | 99443 | 23 |
| 07 | 86977 | 356 | 52 | 96841 | 111 | 97 | 99466 | 23 |
| 08 | 87333 | 347 | 53 | 96952 | 107 | 98 | 99489 | 22 |
| 09 | 87680 | 341 | 54 | 97059 | 103 | 99 | 99511 | 21 |
| 10 | 88021 | 332 | 55 | 97162 | 101 | 2,00 | 99532 | 20 |
| 1,11 | 0,88353 | 326 | 1,56 | 0,97263 | 97 | 2,01 | 0,99552 | 20 |
| 12 | 88679 | 318 | 57 | 97360 | 95 | 02 | 99572 | 18 |
| 13 | 88997 | 311 | 58 | 97455 | 91 | 03 | 99590 | 18 |
| 14 | 89308 | 304 | 59 | 97546 | 89 | 04 | 99608 | 17 |
| 15 | 89612 | 298 | 60 | 97635 | 86 | 05 | 99625 | 17 |
| 1,16 | 0,89910 | 290 | 1,61 | 0,97721 | 83 | 2,06 | 0,99642 | 16 |
| 17 | 90200 | 284 | 62 | 97804 | 80 | 07 | 99658 | 15 |
| 18 | 90484 | 277 | 63 | 97884 | 78 | 08 | 99673 | 15 |
| 19 | 90761 | 270 | 64 | 97962 | 76 | 09 | 99688 | 14 |
| 20 | 91031 | 265 | 65 | 98038 | 72 | 10 | 99702 | 13 |
| 1,21 | 0,91296 | 257 | 1,66 | 0,98110 | 71 | 2,11 | 0,99715 | 13 |
| 22 | 91553 | 252 | 67 | 98181 | 68 | 12 | 99728 | 13 |
| 23 | 91805 | 246 | 68 | 98249 | 66 | 13 | 99741 | 12 |
| 24 | 92051 | 239 | 69 | 98315 | 64 | 14 | 99753 | 11 |
| 25 | 92290 | 234 | 70 | 98379 | 62 | 15 | 99764 | 11 |
| 1,26 | 0,92524 | 227 | 1,71 | 0,98441 | 59 | 2,16 | 0,99775 | 10 |
| 27 | 92751 | 222 | 72 | 98500 | 58 | 17 | 99785 | 10 |
| 28 | 92973 | 217 | 73 | 98558 | 55 | 18 | 99795 | 10 |
| 29 | 93190 | 211 | 74 | 98613 | 54 | 19 | 99805 | 9 |
| 30 | 93401 | 205 | 75 | 98667 | 52 | 20 | 99814 | |
| 1,31 | 0,93606 | 201 | 1,76 | 0,98719 | 50 | 2,3 | 0,99886 | 45 |
| 32 | 93807 | 195 | 77 | 98769 | 48 | 2,4 | 99931 | 28 |
| 33 | 94002 | 189 | 78 | 98817 | 47 | 2,5 | 99959 | 17 |
| 34 | 94191 | 185 | 79 | 98864 | 45 | 2,6 | 99976 | 11 |
| 35 | 94376 | 180 | 80 | 98909 | 43 | 2,7 | 99987 | 5 |
| 1,36 | 0,94556 | 175 | 1,81 | 0,98952 | 42 | 2,8 | 0,99992 | 4 |
| 37 | 94731 | 171 | 83 | 98994 | 41 | 2,9 | 99996 | |
| 38 | 94902 | 165 | 83 | 99035 | 39 | 3,0 | 99998 | |
| 39 | 95067 | 162 | 84 | 99074 | 37 | 3,1 | 99999 | |
| 40 | 95229 | 156 | 85 | 99111 | 36 | 3,2 | 99999 | |
| 1,41 | 0,95385 | 153 | 1,86 | 0,99147 | 35 | ∞ | 1,0000 | |
| 42 | 95538 | 148 | 87 | 99182 | 34 | | | |
| 43 | 95686 | 144 | 88 | 99216 | 32 | | | |
| 44 | 95830 | 140 | 89 | 99248 | 31 | | | |
| 45 | 95970 | 135 | 90 | 99279 | 30 | | | |
| 1,46 | 0,96105 | 132 | 1,91 | 0,99309 | 29 | | | |
| 47 | 96237 | 128 | 92 | 99338 | 28 | | | |
| 48 | 96365 | 125 | 93 | 99366 | 26 | | | |
| 49 | 96490 | 121 | 94 | 99392 | 26 | | | |
| 50 | 96611 | 117 | 95 | 99418 | 25 | | | |

## ERREURS A CORRIGER

Page 11 ligne 4, lisez : $(\mu - \frac{1}{2})i$ au lieu de : $(\mu - \frac{1}{\ })i$

» 13 » 8 » $x_{\prime}$ » $x$

# TABLE DES MATIÈRES



